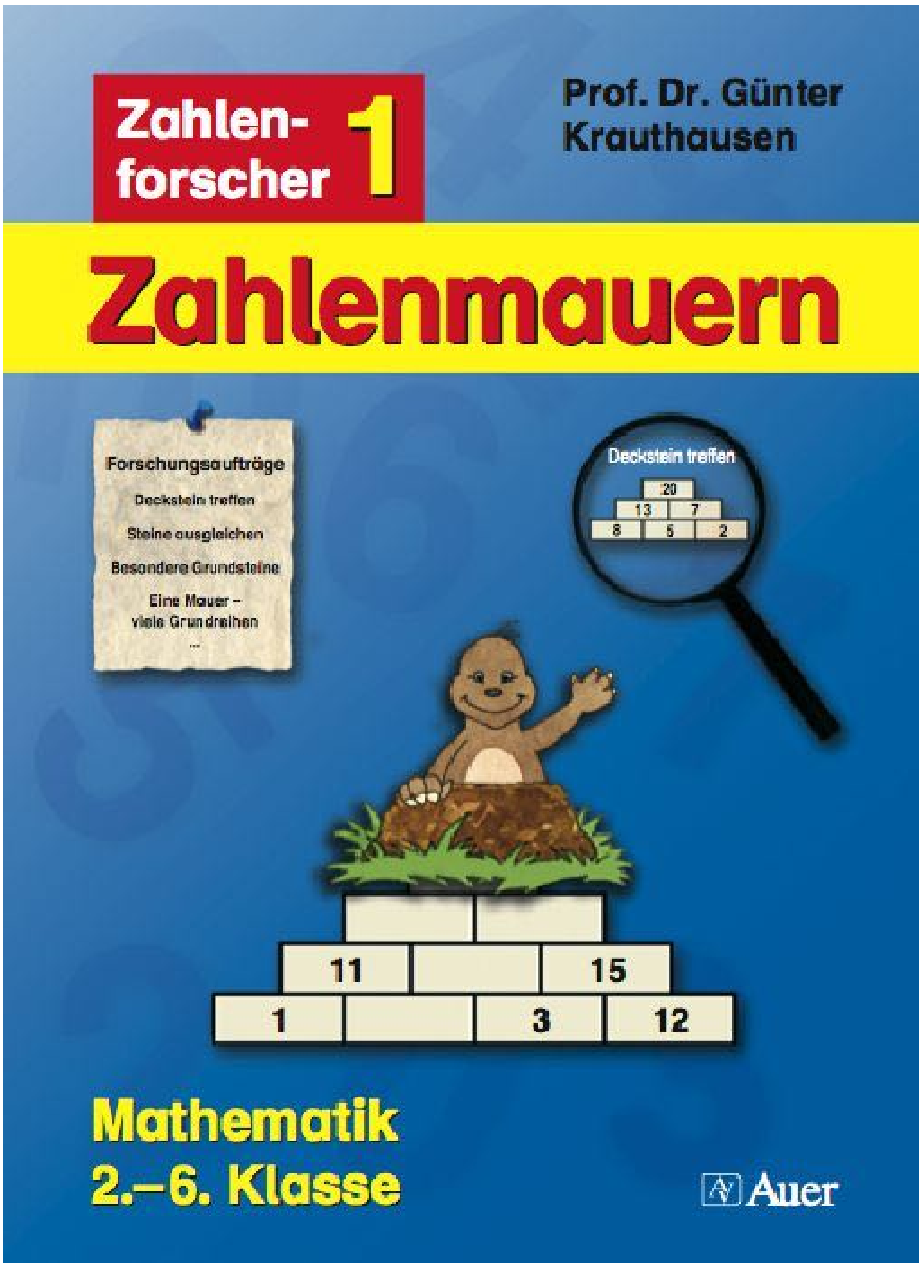


Didaktische Handreichung

© Krauthausen | Universität Hamburg | 2006

Inhaltsverzeichnis

Mathematiklernen mit dem ZAHLENFORSCHER – eine Einführung

Diese didaktische Handreichung zur Software ZAHLENFORSCHER richtet sich an Lehrerinnen und Lehrer sowie Personen, die das Programm im außerschulischen Rahmen nutzen möchten. Je nach Interesse werden die folgenden Kapitel für Sie von unterschiedlichem Interesse sein. Das bedeutet, dass Sie die angebotenen Texte entsprechend selektiv lesen oder bearbeiten können.

Zum besseren Verständnis wird empfohlen, das Programm parallel zum Lesen dieser Handreichung auf dem Bildschirm zu haben, um ggf. gewisse Aktionen begleitend zu erproben.

Zahlenmauern als sog. ›Aufgabenformat‹ können in vielfältiger Weise eingesetzt werden. Auf den ersten Blick mag der Eindruck entstehen, dass eine CD, die ›nur‹ Zahlenmauern ›und sonst nichts‹ enthält, nur einen recht schmalen Einsatzbereich bieten würde. Dies wäre auch dann der Fall, wenn Zahlenmauern lediglich als *Aufgabenträger* für *beliebige* Additions-/Subtraktionsaufgaben benutzt würden, damit aber eben nicht in ihren weiter reichenden Möglichkeiten wirklich ausgeschöpft werden.

Macht man sich aber die Mühe eines genaueren Blicks – und die Kapitel dieser Handreichung wollen genau dabei behilflich sein –, dann wird man bald feststellen, dass die inhaltliche Substanz und das breite Spektrum der Lernziele es theoretisch leicht ermöglichen würden, alleine mit dem Angebot auf *dieser* CD (weitere Aufgabenformate sind geplant) wochenlang sinnvollen Unterricht zu gestalten, ohne dass es zu langweiligen Wiederholungen kommen muss.

Natürlich ist damit nicht gemeint, dass Sie wochenlang nur Zahlenmauern in Ihrer Klasse bearbeiten! Aber wenn die enthaltenen Möglichkeiten und Variationen, die verschiedenen Anspruchsniveaus und Aktivitäten in sinnvoller Weise *verteilt* eingesetzt werden, dann kann mit den Angeboten auf der vorliegenden CD der Mathematikunterricht in den Klassen 2-6 immer wieder gewinnbringend unterstützt werden – auf unterschiedlichen Anspruchsniveaus, in verschiedenen Bereichen und unter aktuellen Zielsetzungen für das Mathematiklernen.

Zahlenmauern für alle Klassenstufen und Leistungsniveaus

Aufgabenformate wie Zahlenmauern können einen neuen Blick auf die Mathematik eröffnen, auch Jenen, die ihr ansonsten eher skeptisch bis reserviert gegenüber standen oder stehen (Wubbels et al. 1997). Die einzige Voraussetzung ist die Bereitschaft und ein wenig Zeit, sich möglichst vorurteilsfrei auf die Anregungen der Software einzulassen.

V. a. die im Modus 4 angebotenen Forschungsaufträge enthalten spannende Zahlenmuster und Beziehungen, die Interesse wecken können. Viele meiner Studierenden haben mir berichtet, wie sie trotz anfänglicher Zurückhaltung (aus Scheu vor dem Unbekannten) schnell Spaß am ›Knobeln‹ mit Zahlenmauern fanden und sie sogar mit Bekannten und Verwandten in der Freizeit erforscht haben.

Aber auch für Kinder in der Grundschule ist dies wichtig, weil hier *fundamentale Grundlagen* für die zukünftige Einstellung zum Lernen generell und speziell zum Mathematiklernen gelegt werden, selbst wenn es sich um vergleichsweise einfache Fragestellungen handelt:

> *»Deine Aufgabe mag noch so bescheiden sein; wenn sie jedoch dein Interesse weckt, wenn deine Erfindungsgabe angeregt wird und du die Aufgabe aus dir selbst heraus löst, so wirst du die Spannung und den Triumph eines Entdeckers erfahren. Wenn solche Erfahrungen in einem Alter, das für Eindrücke empfänglich ist, gemacht werden, so mag das den Sinn für geistige Arbeit hervorrufen und seinen Stempel auf Geist und Charakter für das ganze Leben einprägen«* (Polya 1995, 7).

Mathematikunterricht mit Substanz

Dass es hierbei nicht nur um ein Knobeln i. S. belangloser Spielerei geht, ist nicht etwa einem ausgeklügelten didaktischen Trick zu verdanken. Vielmehr liegt es an der an sich einfachen Tatsache, dass die Aufgabenangebote *mathematisch reichhaltig* sind. Und hier unterscheiden sich Erwachsene überhaupt nicht von Kindern: Würden Sie angehalten, sich über längere Zeit mit stupiden, zusammenhanglosen und inhaltsleeren Aktionen zu beschäftigen (wie es für die Kinder in der Schule z.B. die oft langweiligen Rechenpäckchen sein können; vgl. S. 39), dann verflöge auch Ihre Motivation, Ausdauer und Bereitschaft sehr schnell, bei einer solchen Aufgabe zu verweilen und vielleicht gar noch Freude daran zu entwickeln.

Es ist aber dem gegenüber eine ganz natürliche Reaktion, dass Interesse geweckt, Ausdauer gestärkt und Entdeckergeist gefördert werden, wenn es sich um Aufgaben handelt, die uns *herausfordern*, wenn wir wissen, dass etwas dahinter steckt, und wenn wir sehen, mit welchem anderen Wissen oder Können, über das wir bereits verfügen, das neue zu entdeckende Wissen zusammenhängt. Der Mensch ist *von Natur aus* ein ›lernendes Tier‹.

> *»Vögel fliegen, die Fische schwimmen; der Mensch denkt und lernt. Deshalb brauchen wir Kinder nicht zum Lernen zu überreden, verführen oder drängen. Es ist nicht notwendig, dass wir ständig auf ihren Gedanken herumhacken, um sicher zu gehen, dass sie etwas lernen«* (Holt 1979, 178).

Damit sich Lernen in diesem Sinne ereignen kann, ist also der *sachliche Gehalt* einer (hier: mathematischen) Lernumgebung entscheidend, und nicht eine sachfremde Verpackung, die die angeblich so uninteressante Mathematik ›genießbar‹ machen soll, um die Kinder zum Mathematiklernen zu *überlisten*! Unterrichtsbeobachtungen in den letzten 10-15 Jahren und

in vielen Ländern haben immer wieder gezeigt, dass Kinder sich mit solchen, auf den ersten Blick recht schlicht aussehenden, gleichwohl aber gehaltvollen innermathematischen Fragen oder Problemstellungen wie etwa im Umfeld von Zahlenmauern sehr gerne beschäftigen (auch ohne Verpackung in Abenteuer-Geschichten oder andere, von Computerspielen her bekannten Szenarios). Sie tun das, weil eben hinter dem reinen Rechnen, das dabei gleichwohl auch umfassend geübt wird, noch etwas Weiteres, Interessantes dahinter steckt: ein didaktischer Mehrwert sozusagen – die Mathematiker sprechen von ›Mustern‹ (Devlin 1998).

Mathematik als die Wissenschaft der Muster

Der Physik-Nobelpreisträger und ›Erfinder‹ der Quarks, Murray Gell-Mann, schreibt in seinem Buch *Das Quark und der Jaguar: Vom Einfachen zum Komplexen. Die Suche nach einer neuen Erklärung der Welt* Folgendes zur Rolle von Mustern in der Wissenschaft und im ›richtigen Leben‹:

> *»Überall um uns herum gibt es Tatsachen, die miteinander verknüpft sind. Natürlich kann man sie als getrennte Objekte betrachten und als solche erforschen. Wie anders aber stellt sich alles dar, sobald wir erkennen, dass sie Teile eines Musters sind! Viele Tatsachen sind dann nicht mehr nur Dinge, die man auswendig lernt, vielmehr ermöglichen uns die Beziehungen zwischen ihnen, sie mit Hilfe einer komprimierten Beschreibung, einer Art Theorie oder Schema, zu begreifen und uns einzuprägen. Sie bekommen einen Sinn und die Welt wird zu einem Ort, den wir besser verstehen. Das Erkennen von Mustern fällt uns Menschen leicht; wir selbst sind schließlich recht komplexe adaptive Systeme. Aufgrund biologischer Vererbung und kultureller Prägung liegt es in unserem Wesen, nach Mustern zu suchen, Regelmäßigkeiten auszumachen und gedankliche Schemata zu entwerfen«* (Gell-Mann 1996, 144).

Und das gilt auch für Kinder, und zwar bereits lange, bevor sie in die Schule kommen und mit systematischen Lehr-Lernprozessen konfrontiert werden. Richard Feynman, ein weiterer Physik-Nobelpreisträger, erinnert sich an folgende Begebenheit in seiner Kindheit (zit. in Müller/Wittmann 2004, Beiheft).

> *»Als ich noch sehr klein war und in einem Hochstuhl am Tisch saß, pflegte mein Vater mit mir nach dem Essen ein Spiel zu spielen. Er hatte aus einem Laden eine Menge alter rechteckiger Badfliesen mitgebracht. Wir stellten sie vertikal auf, eine neben die andere, und ich durfte die erste anstoßen und beobachten, wie die ganze Reihe umfiel. So weit, so gut. Als nächstes wurde das Spiel verbessert. Die Fliesen hatten verschiedene Farben. Ich musste eine weiße aufstellen, dann zwei blaue, eine weiße, zwei blaue usw. Wenn ich neben zwei blaue eine weitere blaue setzen wollte, bestand mein Vater auf einer weißen. Meine Mutter, die eine mitfühlende Frau ist, durchschaute die Hintergedanken meines Vaters und sagte: ›Mel, bitte lass den Jungen eine blaue Fliese auf-*

stellen, wenn er es möchte.‹ Mein Vater sagte: ›Nein, ich möchte, dass er auf Muster achtet. Das ist das Einzige, was ich in seinem frühen Alter für seine mathematische Erziehung tun kann.‹ Wenn ich einen Vortrag über die Frage ›Was ist Mathematik?‹ halten müsste, hätte ich damit schon die Antwort gegeben: Mathematik ist die Wissenschaft von Mustern.«

Klarer kann man kaum beschreiben, was auch den Kern eines wünschenswerten Mathematikunterrichts ausmachen sollte. Muster sind das *Wesen* der Mathematik wie auch unserer Umwelt. Sie erkennen und nutzen zu lernen, dient der Lebenstüchtigkeit, und insofern leistet hier die Mathematik einen wichtigen *Beitrag zur allgemeinen Denkerziehung*. Das wird manchmal übersehen, wenn eingewendet wird, Zahlenmauern oder ähnliche Aufgabenformate hätten doch so gar nichts mit der vertrauten Umwelt des Kindes zu tun.

Das stimmt aber nur insofern, als die im ZAHLENFORSCHER thematisierten Zahlenmauern in der Umwelt so ›nicht vorkommen‹. Sie deshalb aber als nicht kindgemäß oder uninteressant für Kinder zu erachten, stellt ein verkürztes Verständnis der Forderung nach ›Anwendungsorientierung‹ des Unterrichts dar. Es ist zwar ein sinnvolles und notwendiges Kriterium, dass Kinder das in der Schule zu Lernende mit außerschulischen Alltagserfahrungen in Verbindung bringen sollen. Aber das ist noch kein hinreichendes und zu verabsolutierendes Kriterium. Es würde dabei vergessen, dass zur Anwendungsorientierung ein Pendant mit gleicher Berechtigung dazu gehört: die Forderung nach ›Strukturorientierung‹, welcher durch innermathematische Aufgabenformate wie etwa Zahlenmauern hervorragend entsprochen wird.

Muster können z. B. Regelmäßigkeiten sein, die an den Ergebnissen oder den Ausgangszahlen ins Auge fallen, besonders wenn man sie geeignet sortiert. Oder es werden Beziehungen (Relationen), Verwandtschaften, Gemeinsamkeiten, Unterschiede zwischen verschiedenen Aufgaben oder Fragestellungen erkennbar. Dies gelingt durchaus auch Kindern mit Schwierigkeiten beim Rechnen. Schwache Rechner sind nachweislich nicht auch schon schlechte Problemlöser! Dabei drängen sich – *naturgemäß*, wie Gell-Man und auch Holt (s. o.) betonen – immer wieder Fragen auf wie z.B.: Warum ist das so, warum muss das gar so sein? Wie viele Lösungen dieser oder jener Sorte kann es geben? Können wir *alle* finden? Oder können wir sie so beschreiben, dass wir sie gar nicht alle einzeln aufzuschreiben brauchen? Warum kann es nicht mehr Lösungen geben? Unter welchen Bedingungen tritt dieses oder jenes Zahlenmuster auf? usw. Solchen und ähnlichen Fragen werden Sie insbesondere im Modus *Forschen* der Software ZAHLENFORSCHER begegnen.

Die natürliche Frage nach dem Warum

Kinder bringen bereits aus dem Vorschulalter den natürlichen Drang mit, Phänomene nach ihrem *Warum* zu hinterfragen. Dieses *Kapital* muss die Schule aufgreifen, wertschätzen und ausdrücklich fördern. Das kann bereits recht unaufwändig erfolgen: Hilfreich ist v. a. das gu-

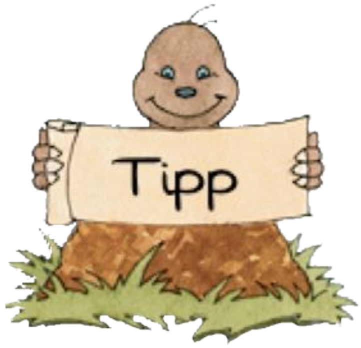
te Vorbild der Lehrerin oder des Lehrers, indem diese die Kinder vom 1. Schultag an daran gewöhnen, dass das Ergebnis einer Aufgabe *eine* Seite der Medaille ist – zwar notwendig, aber oft noch nicht hinreichend. Denn das ›Mathematik-Treiben‹ beginnt häufig erst, *nachdem* ein Ergebnis gefunden wurde! Das hat Winter bereits vor 10 Jahren überzeugend beschrieben:

> *»Da wird eine Aufgabe nicht nur gelöst und damit basta, vielmehr kommt es während der Lösungsbemühungen und nach der Auflösung oder nach dem Eingeständnis des Mißerfolgs zu Vor- und Nachfragen etwa der folgenden Art: Was macht die Aufgabe so schwierig? Was ist der springende Punkt in der Problembarriere, also in dem, was zwischen Gegebenem und Gesuchtem liegt? Komme ich mit Probieren weiter? Hilft eine Zeichnung? Hilft eine andere Bezeichnungsweise? Kann ich die Aufgabe in Teilaufgaben zerlegen? Habe ich schon einmal eine ähnliche oder irgendwie verwandte Aufgabe gehabt, deren Lösung hier vielleicht weiterhelfen kann? Kann man Symmetrien oder A-symmetrien erkennen? Kann man extreme Fälle (z.B. Sonderfälle) ausloten und nutzen? Kann ich rückwärts arbeiten, einen Weg vom Gesuchten zum Gegebenen gehen? Kann ich die Lösung auf andere Art kontrollieren? War das Ergebnis zu erwarten, oder ist das Ergebnis irgendwie überraschend? Gibt es womöglich einen kürzeren, eleganteren Lösungsweg? Kann ich das Resultat oder den Lösungsweg vielleicht noch in anderen Fällen benutzen? Was sind ähnliche Aufgaben, die ich nun selbst stellen kann? Was weiß ich jetzt besser, genauer als vorher? usw.«* (Winter 1995, 42).

Die immer wiederkehrende und damit erwartbare Frage *»Warum ist das so?«* – in meinen Augen eines der mächtigsten Werkzeuge, das Lehrpersonen im Unterricht zur Verfügung steht (um nicht wie Kühnel vom *Zauberstab des Lehrers* zu sprechen) –, anfänglich (in Stellvertreterfunktion) von der Lehrperson gestellt, wird bald von den Kindern ganz natürlich übernommen. Sie stellen sich diese Frage dann (ungefragt) *selbst*, sie entwickeln eine *Fragehaltung*: Vera, eine (an ansonsten weniger leistungsstarke) Schülerin einer 3. Klasse in meinen frühen Jahren als Grundschullehrer, kam eines Tages nach einer 30-minütigen konzentrierten Zurückgezogenheit aus der Leseecke zu mir, hielt mir ein Blatt unter die Nase und meinte: »Ich habe es *endlich* rausbekommen, aber jetzt willst du bestimmt wieder wissen, *warum* – aber das schreib ich dann als Hausaufgabe auf.« – Botschaft angekommen! Kinder merken, akzeptieren und verinnerlichen also sehr schnell, wenn sich die Lehrerin oder der Lehrer mit dem Rechenergebnis allein nicht zufrieden gibt.

Selber tun!

Nicht nur zum eigenen Vergnügen und Staunen über Zahlenmauern, sondern auch um die Denkwege und Vorgehensweisen der Kinder besser verstehen und sachgerecht fördern zu können, gilt der folgende …



Bearbeiten Sie die elf Forschungsaufträge des ZAHLENFORSCHERs zunächst *selbst* und *in Muße*, also möglichst nicht unter dem Druck kurzfristiger Unterrichtsvorbereitung.

Die Beobachtungen, die Sie dabei an sich selbst machen können …

- Ihre Strategien,
- Ihre Erfolgserlebnisse, auch die Holzwege, die Sie zwischendurch nahezu natürlicherweise beschreiten werden (und wie Sie damit umgehen!),
- aber auch die Freude über Zwischenergebnisse und Erfolge …

sind ein *unermessliches Kapital*, wenn Sie dann die Aufgabenstellungen Ihren Schülerinnen und Schülern anbieten.

Lernen hat viel mit ›Zumuten‹ zu tun – auch sich selbst gegenüber. Was wir also im Unterricht den Kindern zumuten (sollen), darf für uns selbst keine Unzumutbarkeit sein! Und den Kindern in der Schule *müssen* wir Zumutungen anbieten, denn

> *»[w]enn der Schüler keine Gelegenheit in der Schule gehabt hat, sich mit den verschiedenen Gefühlsregungen im Kampf um die Lösung vertraut zu machen, so ist seine mathematische Erziehung in dem lebenswichtigsten Punkte fehlgeschlagen«* (Polya 1995, 102).

Zum Umgang mit Bedenken

»Meine Schüler verstehen nicht, was sie tun sollen. Die Arbeitsaufträge sind zu kompliziert. Unsere Schüler brauchen klare und einfache Aufgaben.« Sind diese oder ähnliche Bedenken, zusamengestellt von den Deutschdidaktikern Heiko Balhorn und Inge Büchner im Lehrerkommentar zu ihren Ringbüchern *Denkwege in die Rechtschreibung* (Hamburg 2005), nicht ebenso für den ZAHLENFORSCHER zu erwarten?

Ja, das ist denkbar. Und *weil* es denkbar ist, liegt es auch nahe, hier aus Autorensicht eine ebenso nahe liegende Interpretationshilfe anzubieten.

Nicht zuletzt um die Gemeinsamkeiten fachdidaktischer Forschung und Bemühungen über die Fachgrenzen hinaus deutlich zu machen, um also zu zeigen, dass den Grundschulkindern im Unterricht eine vergleichbare, d. h. *konsistente* Anregung und Förderung bei ihren Lernprozessen in allen Fächern zuteil werden soll, möchte ich die selbst gegebene Antwort von Balhorn/Büchner wörtlich zitieren, denn sie kann ungebrochen auf mathematikdidaktische Bemühungen und Forderungen übertragen werden. Sie brauchen lediglich das Wort ‹Rechtschreibdidaktik‹ gedanklich zu ersetzen durch ›Mathematikdidaktik‹ oder ›Mathematiklernen‹:

> »Ja, Sie werden auf ein ›Ich kann das nicht!‹ Ihrer Schüler stoßen, oft stoßen. *Dies müssen wir wollen*.
>
> Wir plädieren für eine auf *Verstehen* zielende Rechtschreibdidaktik. Und *Verstehen ist nicht einfach zu haben, nicht mit Aufgaben, die sich von allein, schematisch ausfüllen lassen*. Viele Schüler mögen solche Aufgaben. Aber Verstehen bedeutet Mühe, Arbeit, Fragen, Unsicherheit und ein Mehr an Wissen und Können, das weitere Fragen aufwirft.
>
> Auch für *KollegInnen* werden bestimmte Aufgaben nicht sofort vertraut und lösbar sein, denn wir versuchen durchaus und *absichtlich Irritationen* zu erzeugen, die eben die beste Voraussetzung sind, etwas wissen, klären, lernen zu wollen« (Balhorn/Büchner 2005; Hervorhebung GKr).

Fühlen Sie sich also ermutigt – nach einer Auseinandersetzung mit den Hilfen in diesen didaktischen Handreichungen –, Ihren Kindern im Unterricht den einen oder anderen *Forschungsauftrag* tatsächlich einmal ›zuzumuten‹. Und bedenken Sie dabei, dass das Erforschen und Erkunden gelernt werden muss. Das schließt eventuelle Vorläufigkeiten oder Anlaufschwierigkeiten *naturgemäß* mit ein. Wichtig ist allein, geduldig – aber auch beharrlich – an den notwendigen Kompetenzen gemeinsam mit den Kindern zu arbeiten. Das wiederum gelingt nur, wenn *regelmäßig* entdeckende Lernprozesse an geeigneten Lernumgebungen/Problemstellungen (ob mit oder ohne Software!) angeboten, ›zugemutet‹ werden. Wie die Erprobungen während der Entwicklungszeit und auch andere publizierte Erfahrungen gezeigt haben, überraschen die Kinder dabei nicht selten mit zuvor vielleicht unerwarteten Ideen und Einsichten …

Vermeiden auch Sie wenn möglich den – durch diese Handreichung auch ermöglichten – *Weg des geringsten Widerstandes*. Wer nämlich die ausführlichen Aufschlüsselungen und Bearbeitungen der einzelnen Forschungsaufträge im Kapitel 5 einer *vorausgehenden eigenen* Erkundung vorzieht, der wird vermutlich die Erfahrung machen, beim Durchlesen stets zustimmend nicken zu können – man kann *nach-vollziehen*, was dort geschrieben steht. Man sollte das aber nicht mit wirklichem *Verstehen* verwechseln oder glauben, dass man so oder ähnlich – hätte man nur mehr Zeit investiert – wohl ganz sicher auch alleine vorgegangen

wäre! Meist ist dies nur eine Scheinsicherheit, in Wirklichkeit macht man sich selbst etwas vor.

Vor allem beraubt man sich selbst der Freude und des guten Gefühls, es *selbst* heraus gefunden zu haben! Zum nachträglichen Abgleich mit den eigenen Erkundungen sei natürlich das Kapitel 5 empfohlen, denn *dazu* wurde es geschrieben.

In diesem Sinne wünsche ich viel Vergnügen, viele helle Momente und Erfolgserlebnisse bei der Arbeit mit dem ZAHLENFORSCHER!

G. Krauthausen

Universität Hamburg

»Nicht weil es schwer ist, fangen wir es nicht an, sondern weil wir es nicht anfangen, ist es schwer.«

(Seneca)

Zum Aufbau dieser Handreichung

Die vorliegende Handreichung fällt in ihrem Umfang wie in ihrem Inhalt vermutlich aus dem Rahmen dessen, was man üblicherweise bei ›Lernprogrammen‹ erwarten darf. Daher finden Sie hier einen kurzen Überblick, so dass Sie je nach eigenen Voraussetzungen oder Interessen ggf. auch selektiv lesen können.

Diese Handreichung soll Ihnen dabei behilflich sein,

- sich eine *erste Orientierung* über die Möglichkeiten des Programms zu verschaffen,
- seine spezifischen *Optionen* näher kennen zu lernen,
- die *didaktischen Hintergrundkonzepte und die Ziele* des Programms zu studieren,
- Fragen des unterrichtlichen (oder außerschulischen) *Einsatzes* kennen zu lernen,
- sich *fachlich* mit der Thematik Zahlenmauern vertraut zu machen.

Dazu wird Ihnen im **1. Kapitel** ein *Kurzüberblick* angeboten, der die wichtigsten Optionen der Software sowie die vorkommenden Steuerelemente stichpunktartig erklärt. Dieses Kapitel erlaubt Ihnen dann bereits den direkten Einstieg in das Programm.

Dem **2. Kapitel** können Sie Informationen zum *fachdidaktischen Konzept* entnehmen, das hier umfassend dargelegt wird. Dieses Kapitel enthält u. a. Kernaussagen zum zugrunde liegenden Lern- und Lehrverständnis, zum Konzept des Produktiven Übens und der natürlichen Differenzierung sowie zu substanziellen Lernumgebungen.

Im **3. Kapitel** werden die *Lernziele* zusammengestellt, die sich bei einem sachgerechten Einsatz dieser Software verfolgen lassen. Dabei wird Bezug genommen auf Anforderungen neuester Lehr- und Bildungspläne und auf den aktuellen fachdidaktischen Forschungsstand.

Das **4. Kapitel** bietet einige Vorschläge, wie man die Software bzw. ihre Inhalte *im Unterricht methodisch nutzen* kann - online wie offline. Die Empfehlungen stammen u. a. aus den Erfahrungen der umfangreichen Unterrichtserprobungen vor und während der Software-Entwicklung.

Im **5. Kapitel** finden Sie eine *inhaltliche Analyse der Zahlenmauern* sowie eine Ausarbeitung aller im Programm enthaltenen Forschungsaufträge (vgl. S. 8: *Selber tun*).

Wer sich noch näher mit Zahlenmauern und ihren Möglichkeiten (auch in der Sekundarstufe) beschäftigen möchte, der findet auf der CD einige ausgewählte Publikationen im PDF-Format zu Zahlenmauern, und zwar im Einzelnen:

1. Affolter, Walter et al. (2000): Das Zahlenbuch. Mathematik im 6. Schuljahr, S. 32-33. Zug
2. Affolter, Walter et al. (2001): Das Zahlenbuch. Mathematik im 6. Schuljahr. Begleitband, S. 157-162. Zug

3. Hubacher, Elisabeth/Hengartner, Elmar (1999): Kinder entwickeln vielfältige Aufgaben: Zahlenmauern (1. Klasse). In: E. Hengartner (Hg.), Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht, S. 69-71. Zug
4. Kopp, Margit (2001): Algebra mit Zahlenmauern. mathematik lehren, H. 105, S. 16-19
5. Krauthausen, Günter (1995): Zahlenmauern im 2. Schuljahr - ein substantielles Übungsformat. Grundschulunterricht, H. 10, S. 5-9
6. Müller, Jan Hendrik (2005): Entdeckend lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe. In: PM, H. 2, 32-38
7. Pinel, Adrian (1990): Wall games. Strategies, H. 1, S. 28-31
8. Scherer, Petra (1997): Substantielle Aufgabenformate - jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht. Grundschulunterricht, H. 1, S. 34-38
9. Steinweg, Susanne (2001): Tim zeigt uns die Mathematik. Grundschulunterricht, H. 4, S. 14-18

Entwicklungsprinzipien des ZAHLENFORSCHERs

Bei der programmtechnischen Entwicklung wurden neueste Erkenntnisse und Werkzeuge des Softwaredesigns eingesetzt. Der Entstehungsprozess folgte dem *Primat der Didaktik* sowie dem Prinzip *partizipativer Technikgestaltung*, das professionelle Experten aus unterschiedlichen Bereichen einband: Fachdidaktik, Grafik, Screendesign, Programmierung, Tontechnik, Sprecher, Lehrerinnen und Lehrer, Kinder (im Rahmen der potenziellen Adressaten) und redaktionelle Koordination.

Programmierung und konzeptionelle Detailentwicklung liefen - auf der Basis eines vorläufigen Pflichtenheftes - *parallel und schleifenförmig* ab (zyklisches Entwicklungsmodell), um für beide Seiten optimale Flexibilität und Einflussnahme bis zum endgültigen Produkt zu gewährleisten. Das macht den Entwicklungsprozess komplexer, kommt aber dem Endprodukt zugute.

Ziel war es, die (fachdidaktisch legitimierte) immense Komplexität und Vernetztheit der programmiertechnischen Erfordernisse gleichwohl unter einer Benutzerschnittstelle anzubieten, die sowohl *künstlerisch-ästhetischen Standards* professionellen Screendesigns, (wünschenswertem) *kindlichem Ästhetikempfinden* (keine ›Anbiederung an den Publikumsgeschmack‹, sondern Beitrag zur Geschmacks*bildung*) wie auch und v. a. möglichst *intuitiver bzw. leicht erlernbarer Handhabung* gerecht wird.

1 So sieht er aus – der ZAHLENFORSCHER

1.1 Kurzübersicht

Der ZAHLENFORSCHER-Bildschirm besteht aus drei Teilen: *Navigationsleiste* (am linken Bildschirmrand), *Werkzeugleiste* (am rechten Bildschirmrand) und *Arbeitsfläche* im Zentrum des Bildschirms.

Navigationsleiste

Schließen-Taste: Programm beenden

Fragezeichen-Taste: Ein-/Ausschalten der kontext-sensitiven Hilfe (keine inhaltliche Hilfe!): Beim Überstreichen mit der Maus erscheinen jeweils kurze Texte zur Erklärung der entsprechenden Stelle bzw. Optionen.

Sprachauswahl-Taste: Umschalten zwischen deutscher und englischer Sprachversion

Lautsprecher-Taste: Aus- oder Einschalten der Tonausgabe (voreingestellt: *aus*). Die Texte der Hilfefunktion oder die Forschungsaufträge können hierüber vorgelesen werden (Abbruch mit *Weiter*- oder *Schließen*-Taste).

Drucker-Taste: Druckt die angezeigte Seite über einen angeschlossenen Drucker aus.

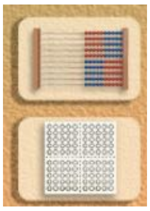
Werkzeugleiste (kontext-sensitiv, d. h. nur die jeweils sinnvollen Tasten sind zu sehen)

Maulwurfhügel (jederzeit sichtbar): Auf Klick erscheint – vielleicht – ein Tipp.

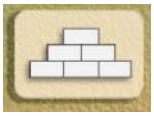
An bestimmten Stellen erscheint der Maulwurf automatisch mit Erklärungen, Tipps oder Anregungen, die automatisch nach 1 Minute verschwinden, wenn sie nicht durch Anklicken akzeptiert werden. Vorgelesen (bei eingeschaltetem Ton) werden nur akzeptierte Tipps.

Regel (nur 1. Seite): Zeigt die Regel zum Aufbau von Zahlenmauern an. Die Regel erscheint auch durch Anklicken der Banderole.

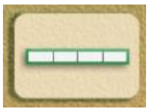
Prüftaste: Prüft berechnete Mauern auf rechnerische Richtigkeit. Im Falle eines Rechenfehlers wird die jeweilige Mauer mit einem Fehlerblitz markiert. Die genaue Stelle des Fehlers innerhalb der Mauer wird jedoch nicht angezeigt (zur Begründung s. 2.5).



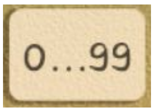
Rechenrahmen/Hunderterfeld: Öffnen die entsprechende Darstellung als frei auf dem Bildschirm positionierbare Fenster. Die Perlen des Rechenrahmens lassen sich mit der Maus bewegen, im Schreibfeld darunter können Zwischenrechnungen notiert werden. Mit einem roten und blauen Stift können Punkte im 100er-Feld gefärbt oder mit dem Radiergummi Färbungen wieder rückgängig gemacht werden.



Neue Mauer(n): Zur Anforderung einer neuen Leermauer oder eines neuen Mauernsets. Größe und Beschaffenheit richtet sich nach der jeweiligen Voreinstellung bzw. der Kontextsituation.



Neue Grundreihe (nur im Modus *Forschen*): Ruft eine neue Grundreihe auf.



Sortier-Taste (nur im Modus *Forschen*): Ausgefüllte Zahlenmauern werden auf der Arbeitsfläche automatisch umsortiert. Das Sortierkriterium ist abhängig von der jeweiligen Fragestellung.

Marker-Taste: Verwandelt den Cursor in einen Marker, mit dem sich einzelne Mauernsteine gelb färben (und wieder entfärben) lassen. Dies erleichtert das Beobachten und Ansprechen von Einzelsteinen, z. B. wenn im Forscherheft auf Details hingewiesen werden soll.

Taschenrechner-Taste (nur im Modus *Forschen*; erscheint erst, wenn zuvor einige Beispiele selbst berechnet wurden): Automatische Berechnung von Zahlenmauern. Dient der Herstellung von hinreichend umfangreichem Ausgangsmaterial, auf dessen Basis erst Musterbeobachtungen sinnvoll erfolgen können. Dadurch ist es auch rechenschwächeren Kindern möglich, sich auf die (hier) zentralere Frage des Erkennens, Beschreibens und Begründens von Mustern zu konzentrieren.

Neu-Taste mit grünem Rückpfeil (nur im Modus *Forschen*): Neuer *Ansatz*. Zu unterscheiden von ›neuer Leermauer‹. Die bisher in diesem Forschungsauftrag berechneten Beispiele werden gelöscht!

Start (nur im Modus *Selbst wählen*): Arbeitsblätter mit selbst eingegebenen Vorgaben werden für die Bearbeitung am Bildschirm bereitgestellt.

Speichern-Taste (im Modus *Selbst wählen* und *Forschen*): Ablage in den Ordnern *Üben* oder *Ergebnisse* oder *Lernbericht*.

Laden-Taste (im Modus *Selbst wählen* und *Forschen*): Zugriff auf zuvor abgelegte Dokumente in den Ordnern *Üben*, *Ergebnisse* oder *Lernbericht*.

Arbeitsbereich

Er macht den Hauptanteil des Bildschirms aus und ist durch vier Reiterkarten (Programm-Modi) gegliedert, die stets am oberen Rand erkennbar sind und zum Wechseln zwischen den Bearbeitungsmodi angeklickt werden können. Die vier Programm-Modi bedeuten kurz gesagt (zu Details s. 1.2):

Modus *Regel*:

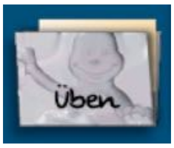
Erläuterung der Regel für Zahlenmauern und Illustrierung durch unterschiedliche Beispiele.

Modus *Rechnen*:

Berechnen vorgegebener Zahlenmauern (gemischtes Üben von Addition und Subtraktion im voreingestellten Zahlenraum) auf der Grundlage didaktisch vorstrukturierter Aufgabenpools.

Modus *Selbst wählen*:

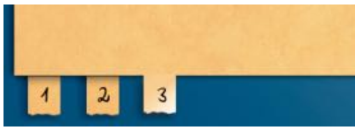
Benutzerorientierte Generierung individueller Zahlenmauern gemäß selbst gewählter Mauerngröße, Ort und Art der Belegung mit Vorgabewerten (›Arbeitsblattgenerator‹ mit weit reichenden Freiheitsgraden, auch für Lehrpersonen zur Erstellung individueller Arbeitsblätter; keine vorgegebenen Pools mehr). Die so generierten Zahlenmauern können entweder direkt am Bildschirm bearbeitet oder ausgedruckt und auf Papier bearbeitet oder in den Ordner *Üben* (am unteren linken Bildschirmrand; s. Abb.) zur späteren Benutzung abgespeichert werden.

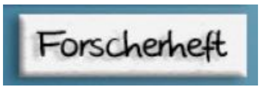


Modus *Forschen*:

Auf einer Pinnwand können elf *Forschungsaufträge* rund um Zahlenmauern ausgewählt werden, die mit unterschiedlichen Zugängen, auf unterschiedlichen Wegen, mit unterschiedlicher Bearbeitungstiefe, mit unterschiedlichen Hilfsmitteln und unterschiedlichen Darstellungen zu bearbeiten sind.

Bei Bedarf wird automatisch eine neue Seite angelegt. Über die Anzahl der vorhandenen Seiten informieren die Seitenreiter am unteren Rand, die ein flexibles Blättern erlauben.





Die Bearbeitungsprozesse (Vorgehensweisen, Schwierigkeiten, Hilfen, noch offene Fragen, ...) sollen in einem *Forscherheft* dokumentiert werden, das über eine entsprechende Taste am unteren rechten Bildschirmrand aufgerufen und frei auf dem Bildschirm platziert werden kann. Es lässt sich mit Text füllen sowie mit Abbildungen selbst berechneter Beispielmauern illustrieren. Das *Forscherheft* hat Notizbuch-Charakter (vgl. S. 29 f., 67 f.).

Eine Aufbereitung der dort abgelegten Texte für unterschiedliche Zwecke und Adressaten ist im Ordner *Ergebnisse* möglich (untere linke Bildschirmecke). Analog zum Forscherheft lassen sich (u. a. auch aus diesem) Text und Abbildungen übernehmen. Des Weiteren stehen Schriftattribute (fett, kursiv, unterstrichen) sowie zwei Schriftgrößen zur Auswahl. Drei Registerkarten bieten Leitfragen an, die beim Aufbau der Ergebnisberichte für unterschiedliche Adressatenbezüge behilflich sein sollen.

Ebenfalls in der linken unteren Bildschirmecke lässt sich innerhalb eines Forschungsauftrags der *Lernbericht* aufrufen. Er dient dem Rückblick auf den Lernprozess und soll helfen, diesen durch die Beantwortung relevanter Fragen (Ankreuz-Raster) bewusster machen.

Wichtige Anmerkungen für den Unterrichtseinsatz:

Nutzergewohnheiten von Grundschulkindern zeigen häufig in einer ersten Phase im Umgang mit einer neuen Software rasches ›Herumklicken‹, um sich zunächst einmal einen groben Überblick zu verschaffen. Dies weicht aber bald einer zielgerichteteren Praxis, wenn sich eine gewisse Vertrautheit und Orientierung über den Funktionsumfang und die Optionen des Programms eingestellt haben.

Ergänzend oder begleitend zu den eigenen Erkundungen der Kinder wird empfohlen, gemeinsam die einzelnen Modi, Tasten und Funktionen zu besprechen, da diese schließlich Konventionen darstellen und als solche nicht ›entdeckt‹ zu werden brauchen. Die umfangreichen Schulerprobungen während der Programmentwicklung haben gezeigt, dass sich die Kinder dann sehr schnell in der Modulstruktur und in den nahe gelegten Arbeitsweisen des ZAHLENFORSCHERs zurecht finden.

Die Modi *Regel, Rechnen* und *Selbst wählen* haben ihr Pendant im alltäglichen Unterricht und stellen daher für die Kinder i. d. R. kein Problem dar. Im Modus *Forschen* gehen aus konzeptionellen Gründen Praktiken und Prinzipien ein, die in besonderer Weise den Postulaten eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts entsprechen. Im Rahmen von Software ist es aber bislang weitestgehend unüblich, dass explizite Werkzeuge zu ihrer ausdrücklichen Förderung vorhanden sind.

Von daher kann es sein, dass insbesondere die ZAHLENFORSCHER-Optionen im Modus *Forschen* für manche Kinder und auch Lehrpersonen noch ungewohnt sind. *Eine sachgerechte Handhabung des Forscherheftes etwa bedarf intensiver Bemühungen und Vorarbeit. Das Verfassen mathematischer Texte (vgl. Ergebnisordner) bedarf als Teil der Unterrichtskultur der gezielten Anleitung und Förderung.*

Diese Tatsache ist aber keine Überforderung für die Kinder, wenn das Verfassen mathematischer Texte im alltäglichen Unterricht regelmäßig gefördert und gefordert wird. Wie dokumentierte Erfahrungen zeigen, können die ersten Produkte dieser Art noch sehr einfach oder kurz ausfallen (Einwortsätze), sich aber im Laufe eines Schuljahres entwickeln (vgl. die Schülerdokumente in Kap. 4.2). Den Kindern diese Zeit zu geben, wird sich langfristig mit Sicherheit auszahlen und zu einer Bereicherung des Unterrichts führen können.

Wenn der ZAHLENFORSCHER also zum ersten Mal diese Forderungen der Lehr- und Bildungspläne konsequent auch auf Software-Ebene unterstützt bzw. implementiert hat, so sollten für seine sachgerechte Nutzung diese programm-unabhängigen Voraussetzungen mit bedacht und berücksichtigt werden.

Abschließend noch eine Information zum verwendeten Zahlbereich:

Im Modus *Selbst wählen* und im Modus *Forschen* arbeitet der ZAHLENFORSCHER nicht nur im Bereich der *natürlichen* Zahlen, sondern lässt auch den Bereich der *ganzen* (also auch negative) Zahlen zu (Ausnahmen: Forschungsaufträge 1b, 8 und 11b). Kinder, die (offiziell im Unterricht) noch keine negativen Zahlen kennen gelernt haben, werden bei der Arbeit mit dem ZAHLENFORSCHER keinerlei Unterschied bemerken, solange sie nicht von sich aus negative Zahlen benutzen. Für all jene aber, die mit negativen Zahlen bereits etwas verbinden können, erlaubt der ZAHLENFORSCHER auch die Nutzung dieses Zahlbereichs. Und noch mehr: Das Format der Zahlenmauern kann sich als ein substanzielles Umfeld zur Übung des Rechnens im Bereich der ganzen Zahlen und darüber hinaus erweisen (vgl. Müller 2005, als PDF auf dieser CD), weil dieses Üben durch die hinterlegten Forschungsaufträge nicht auf die rein formalistische Berechnung beschränkt bleibt, sondern durch den genannten Kontext *Sinn macht*.

1.2 Der modulare Aufbau im ZAHLENFORSCHER

In diesem Abschnitt finden Sie genauere Informationen zu den einzelnen Programm-Modi. Zur *didaktischen Begründung* der jeweiligen Einzelentscheidungen des Programmaufbaus sei auf die jeweiligen Ausführungen im 2. Kapitel verwiesen.

Wenn für die einzelnen Modi *Schwerpunkte* benannt werden, die die Arbeit jeweils charakterisieren, dann ist das, insbesondere bzgl. der Modi 2-4, nicht im Sinne einer trennscharfen Abgrenzung zu verstehen. Tatsächlich hängen die jeweiligen Ziele und Schwerpunkte eng zusammen. Sie sind aufeinander angewiesen und können sich wechselseitig befruchten. So ist die Übung des Addierens und Subtrahierens ein erklärter Schwerpunkt des Modus *Rechnen*, aber in allen anderen Modi wird naturgemäß auch Addieren und Subtrahieren geübt (vgl. die phasen-übergreifende Funktion des Übens im didaktischen Rechteck bei Wittmann 1992, 178; vgl. S. 46). Und ebenso können Musterverständnis oder Problemlösefähigkeiten (Schwerpunkt im Modus *Forschen*) auch im Modus *Selbst wählen* bei der Generierung individuellen Aufgabenmaterials sinnvoll genutzt werden. Die Ausweisung der Modus-Schwerpunkte dient also lediglich der Bewusstmachung der Bandbreite und sollte nicht als Schematismus missverstanden werden. Ganz ähnlich wie auch die Übersicht der *Übungstypen* (vgl. 2.2; Wittmann 1992) nicht in einen ›Übungstypen-Erkennungsdienst‹ ausufern, sondern als gedankliches Gerüst zur Vermeidung von Einseitigkeiten beim Üben gedacht ist.

1.2.1 Modus *Regel*: Schwerpunkt Regelverständnis

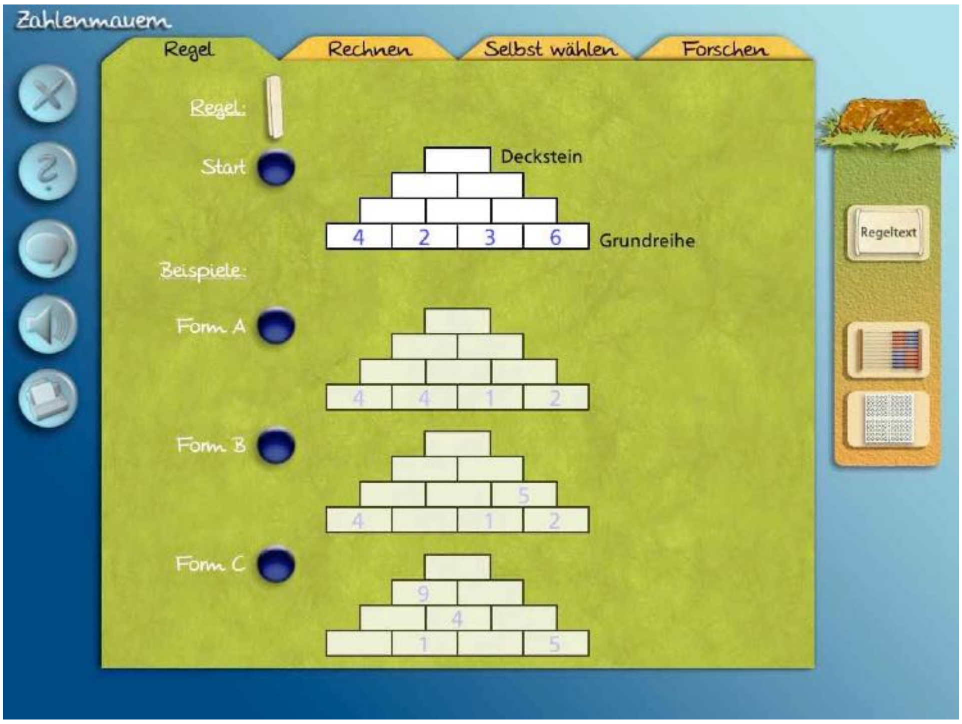
Soll der ZAHLENFORSCHER im Unterricht eingesetzt werden, so empfiehlt es sich, das Aufgabenformat der Zahlenmauern vorher ohne Computer einzuführen und den Kindern erste Orientierungsübungen mit Papier/Bleistift zu ermöglichen. Unter diesen Umständen wird dann die (grün hervorgehobene) Karteikarte *Regel* höchstens noch zur bedarfsweisen Rückversicherung während der Arbeit mit der CD genutzt.

Sind Zahlenmauern jedoch vorher nicht bekannt, dann ermöglicht die Regelseite das Kennenlernen der Verfahrensweise und zeigt anhand dreier Beispiel-Typen die unterschiedlichen Konstruktionstypen von Zahlenmauern auf.

Regel-Beispiel

Das oberste Beispiel (nur eine Version, keine Variationen) klärt die wenigen *Begriffe*, die ein Ansprechen von Phänomenen in späteren Modi erleichtern: *Grundreihe* für die unterste Mauernschicht und *Deckstein* für den obersten Stein. Die dazwischen liegenden Reihen können bei den diversen Mauerngrößen (die Mauernhöhe entspricht auch der Anzahl der Steine in der Grundreihe) durchnummeriert werden, wobei auf dieser CD als Konvention ›von unten nach oben‹ gewählt wurde. Natürlich sind auch andere Sprachregelungen denkbar (Zielstein, Basisreihe, …), in der Software wird jedoch durchgängig die o. g. benutzt.

Das Regel-Beispiel ermöglicht bzw. erfordert kein Eintippen von Zahlen. Vielmehr wird sukzessive jeweils ein weiterer Stein eingesetzt, wenn die Taste *Start* bzw. *Weiter* gedrückt wird. Dies entspricht einer auch im Unterricht sinnvollen Praxis: Da das Format als solches sowie seine Regel eine *Konvention* ist, macht es wenig Sinn, sie ›entdecken‹ zu lassen. Daher wird die Lehrperson nach Vorgabe einer Grundreihe die Kinder ermuntern darauf zu achten, was sie als Nächstes tut, und darin eine Regel zu erkennen (das ist nicht mit ›entdeckendem Lernen‹ zu verwechseln!). Und dann füllt die *Lehrperson* sukzessive Stein für Stein aus. Erfahrungsgemäß erkennen die Kinder nach dem 2./3. Stein das Additionsverfahren. Diese Vorgaben der Lehrperson übernimmt im Regel-Beispiel des Modus 1 die Software, wobei über die Weiter-Taste gezielt steuerbar ist, wann die nächste Eingabe angezeigt werden soll, so dass diese zuvor auch antizipiert werden kann. Dazu ermuntert auch der Maulwurf mit einem 1. Tipp (»Überlege immer zuerst selbst, bevor du auf ›weiter‹ klickst!«).



Modus *Regel*

Beispiel-Typen

Es folgen dann auf dieser Karteikarte drei weitere Beispiele (Form A-C) mit den prinzipiellen Belegungstypen für Zahlenmauern. Hier muss nun jeweils der Wert für einen Stein über die Tastatur eingegeben und mit ›Return‹ (Eingabetaste auf der Tastatur) bestätigt werden. Die aktuelle Stelle der Berechnung wird jeweils durch einen farbigen ›Aufmerksamkeitsrahmen‹ hervorgehoben. Im Beispiel *A* verläuft er stets chronologisch von unten links nach oben

rechts. Im Beispiel *B* und *C* wird deutlich gemacht, dass es für die Reihenfolge evtl. mehrere Alternativen gibt. Alle Beispiele können mehrfach durchgeführt werden, wobei die Zahlen in der Mauer jeweils wechseln. An dieser Stelle ist aber ein *kleiner* Pool an Variationen hinreichend, da es hier noch nicht um Rechenübungen geht (anders als im Modus *Rechnen*, s. u.):

- *Form A*: Vollständig ausgefüllte Grundreihe. Alle anderen Steine können (ausschließlich) über Additionsaufgaben berechnet werden (von unten nach oben).
- *Form B*: Eine Lücke in der Grundreihe, dafür ein vorgegebener Stein in der darüber liegenden Reihe. Berechnung durch Additionen und *eine* Subtraktion.
- *Form C*: Variable Lücken und vorgegebene Steine. Berechnung durch Additionen und Subtraktionen, ggf. auch in unterschiedlicher Abfolge möglich.

Der Regeltext für Zahlenmauern kann über die entsprechende Taste auch angezeigt werden, die Werkzeuge Rechenrahmen und 100er-Feld lassen sich als ikonische und quasi-enaktive Hilfen hinzuziehen. Auch lässt sich die komplette Regelseite inkl. aller Beispiele ausdrucken.

1.2.2 Modus *Rechnen*: Schwerpunkt Rechenübungen

Dieser Modus dient in erster Linie der (integrativen) Übung von Addition und Subtraktion.

Voreinstellungen
Zunächst kann eine Vorgabe für den *Zahlenraum* vorgenommen werden (bis 20, 100, 1000, 10000 oder gemischt). Nach dieser Entscheidung können Mauerngröße und -typ gewünscht werden:

- Im Zahlenraum bis 20: nur 3er-Mauern; Grundreihenaufgaben (gem. Beispiel *A* der Regelseite; Grundreihe vollständig vorgegeben) oder gemischte Aufgaben (gem. Beispiel *B* oder *C* der Regelseite).
- Im Zahlenraum bis 100: 3er-/4er-/5er-Mauern; dazu jeweils Grundreihen- oder gemischte Aufgaben.
- Im Zahlenraum bis 1000: 4er- und 5er-Mauern; dazu jeweils Grundreihen- oder gemischte Aufgaben.
- Im Zahlenraum bis 10000: nur 5er-Mauern; dazu jeweils Grundreihen- oder gemischte Aufgaben.
- Die Einstellung ›gemischt‹ enthält Zahlenmauern aus allen genannten Zahlenräumen.

Auch wenn (zumindest in den ersten drei Fällen) eine Stufung gemäß der offiziell thematisierten Zahlenräume der Schuljahre 1-3 angeboten wird, ist das nicht als eine Festlegung auf Jahrgangsstufen gemeint. Prinzipiell sollten *allen* Kindern jederzeit alle Optionen offen stehen. Deshalb gibt es auch bewusst keine Voreinstellungsoption, um gewisse Zahlenräume oder Mauerngrößen zu sperren. Denn man braucht Kinder nicht ›vor der Mathematik zu beschützen‹! Wer sich in größere als bislang offiziell thematisierte Zahlenräume vorwagt, folgt erst einmal nur seiner Neugier oder dem Reiz der großen Zahlen – ein Blick in die Zone der nächsten Entwicklung (Wygotsky). Und möglicherweise stellt sich dann heraus, dass das eine oder andere Kind z.B. durch Ausnutzen des Analogieprinzips durchaus Beachtenswertes zu leisten imstande ist. Wem es aber dann dort zu unwegsam oder beschwerlich wird, der kehrt ganz von alleine wieder in vertrautes Terrain, sprich: Zahlenräume oder Mauerngrößen zurück. Dass solche Ausflüge sehr produktiv sein können, dokumentieren nicht zuletzt die Zahlenmauern von Brian und Niklas auf S. 25.

Zum Berechnen der Mauern kann der Cursor mit der Maus beliebig platziert werden, eine Eingabebestätigung über Return ist nicht erforderlich.

Zum Verhalten des ZAHLENFORSCHERs bei Fehlern vgl. Kap. 2.5.

Dokumentation & Druck – der ZAHLENFORSCHER-Ordner

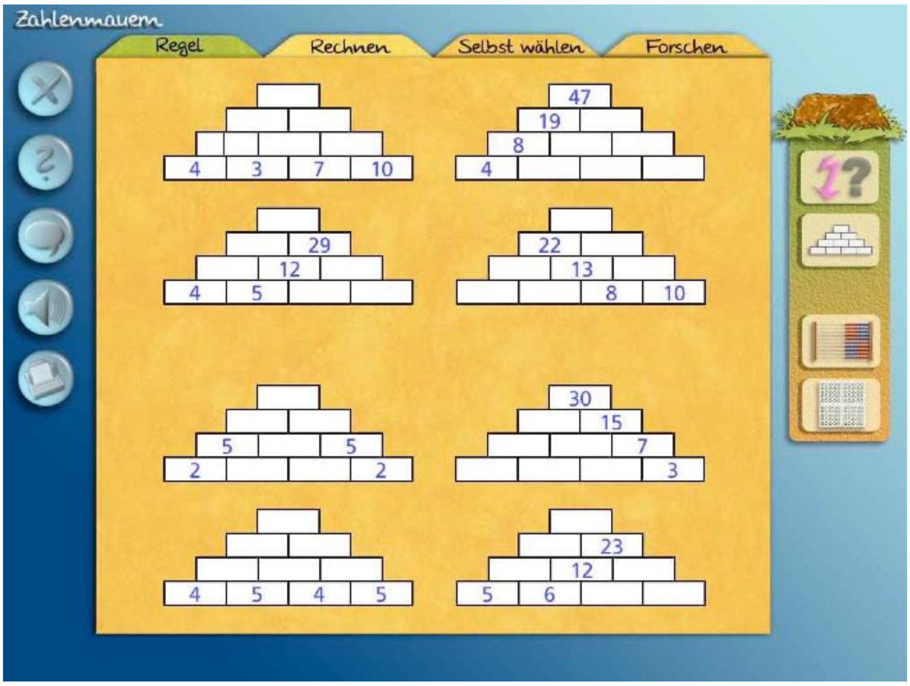
Über die Taste *Neue Mauern* kann eine neue Seite mit zwei 4er-Sets angefordert werden. Ein Speichern der einzelnen Seiten ist an dieser Stelle (anders als im Modus *Selbst wählen bewusst nicht* vorgesehen (nicht nur aus Gründen des Festplatten-Speicherbedarfs). Von Praxislehrkräften wurde vielfach und plausibel bestätigt, dass auf das an *dieser* Stelle produzierte Material im Grunde nicht mehr zurückgegriffen wird, um es weiter zu bearbeiten – höchstens um daran Muster-Untersuchungen vorzunehmen. Dies aber kann gerade anhand ausgedruckter Dokumente besser erfolgen als am Bildschirm.

Daher wird empfohlen, einen handelsüblichen stabilen DIN A4-Ordner anzulegen, der als *mitwachsende Dokumentation* dienen kann. Im Schreibwarenhandel sind Einlageblätter (Reiterkarten) erhältlich, sei es in einfacher Ausführung aus Pappe oder haltbarer aus farbigen Kunststoff. Werden diese gemäß der Aufbaustruktur der ZAHLENFORSCHER-Software beschriftet – *Regel, Rechnen, Selbst wählen, Forschen* (ggf. noch unterteilt in die einzelnen Forschungsaufträge, *Ergebnisse, Lernbericht*) –, so hat man ein einfach und schnell zugängliches Ablage- und Nachschlagesystem. Es dient sowohl zur Dokumentation des Geleisteten wie auch gleichzeitig als Materialdepot für Musterbetrachtungen (vgl. Modus *Forschen*).

Nebenbei dient er der Einführung in den sachgerechten Gebrauch von Ordnungssystemen: Denn ebenso, wie man nicht blindlings alles ausdrucken sollte (nicht nur wegen der Kosten für Druckerpatronen), so muss auch nicht alles und jedes Mauernblatt hier abgeheftet werden. Viel hilft nicht viel! Es gehören also *Überlegungen* dazu, was abgeheftet wird, was warum für wert erachtet wird, aufbewahrt zu werden.

> *»Sammeln tun wir das Auffällige, das Wertvolle: nicht den Sand am Strand, sondern den besonderen Stein. Muscheln, und unter ihnen die seltenen. Ihnen sehen wir etwas an. Das Besondere, Seltene, schwer zu Habende interessiert. [...] Und wir müssen die Funde feiern, also aufbewahren, sichtbar aufhängen, Raum geben für Ergänzungen. Jeder soll seinen Beitrag einreihen können. Die Sammlungen müssen wachsen«* (Balhorn 1998, zit. nach Reinhardt 2001, 13).

Didaktisch vorstrukturierter Aufgabenpool



Modus *Rechnen*

Die Abfolge der einzelnen Mauern und ihrer Vorgabewerte im Modus *Rechnen* wird durch einen umfangreichen, erkennbare Wiederholungen beim Bearbeiten ausschließenden und v. a. *didaktisch begründeten* Pool bestimmt. Eine Einflussnahme auf den Aufgabenpool, von Lehrkräften im Rahmen von Unterrichtssoftware oft und gerne gefordert, ist an dieser Stelle (anders im Modus *Selbst wählen*; s. u.), *bewusst nicht* vorgesehen:

- Zum einen entfällt die *quantitative* Notwendigkeit: Der Umfang des Aufgabenpools ist so groß, dass sich der Ruf nach »mehr Übungsmaterial« wahrlich erübrigt.
- Des Weiteren gibt es auch keinen *qualitativen* Bedarf nach externen Eingriffen in den Poolbestand, da dieser ja vor dem Hintergrund des fachdidaktischen Konzepts des ZAHLENFORSCHERs ganz gezielt so konstruiert wurde, dass (zwingend!) relationale Strukturen, Zahlenmuster und das operative Prinzip realisiert werden.

  Jemand, der mit diesen Begriffen nichts verbindet, kann ihre Funktionen also durch die fehlende Eingriffsmöglichkeit auch nicht irrtümlich außer Kraft setzen. Und für Jemanden, der diese Begriffe inhaltlich zu füllen weiß, brächte ein externer Eingriff ebenfalls keinen Mehrwert, da er prinzipiell gleich vorgehen müsste.
- Davon unberührt stehen im Modus *Selbst wählen* alle Türen offen, um individuelle Bedürfnisse bei der Konstruktion von Zahlenmauern auszuleben.

Möglichkeiten der Musterbetrachtung

Aus dem Poolbestand werden jeweils zusammengehörige 4er-Sets angeboten (zwei pro Bildschirmseite) mit jeweils implementierten Mustern oder Regelhaftigkeiten bei der Wertebelegung. Dadurch lassen sich z. B. Effekte operativer Variationen erkennen und verstehen (Objekt – Operation – Wirkung; vgl. Wittmann 1985), strukturelle Zusammenhänge (inkl. ›Störgrößen‹) aufzeigen und beschreiben u. v. m.

Die Thematisierung solcher Gesetzmäßigkeiten ist einerseits noch nicht Kern dieses Modus. Anderseits sind Kinder aber entweder bereits beim Berechnen der hier angebotenen Beispiele für solche Muster sensibilisiert und sollen sie dann auch hier bewusst wahrnehmen können. Oder es ist didaktisch ratsam, ihren Blick bereits frühzeitig für solche Dinge zu sensibilisieren. Aus diesem Grund weist der Maulwurf hin und wieder mit einem offenen Impuls auf vorhandene Muster hin (»Fällt dir etwas auf …?«) und ermuntert dazu, darüber nachzudenken oder sich mit anderen auszutauschen. Exemplarisch ausgedruckte Seiten können dazu hier oder auch in späteren Phasen des Lernprozesses herangezogen werden.

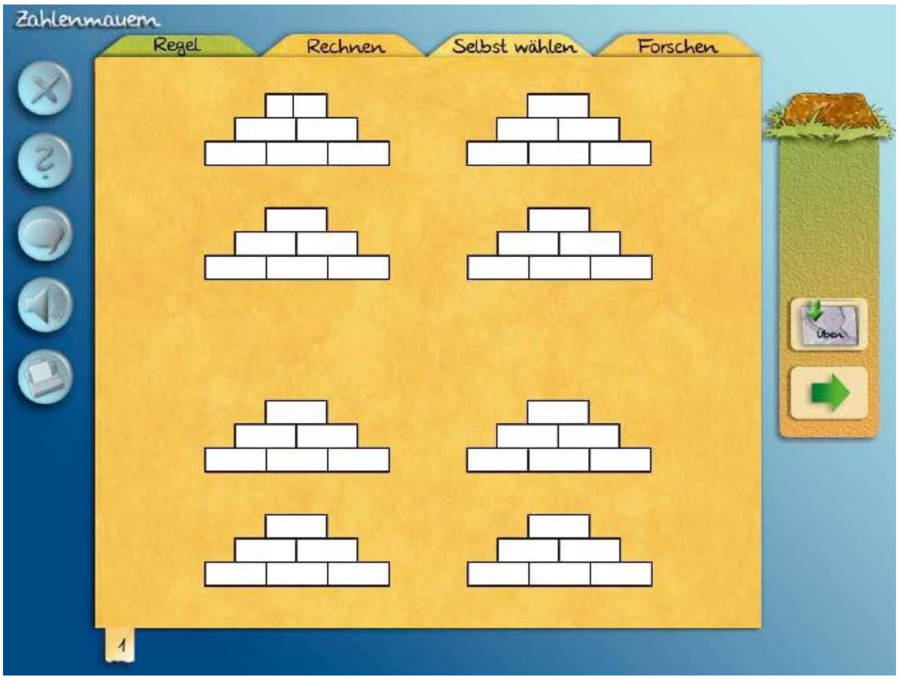
1.2.3 Modus *Selbst wählen*: Schwerpunkt Strukturverständnis & Rechenübungen

Voreinstellungen

Die möglichen Mauerngrößen (3er-, 4er-, 5er-Mauern) begründet sich wie folgt:

- Kleinere als 3er-Mauern sind wenig ergiebig und rechtfertigen wegen der einzigen enthaltenen Addition nicht das Zahlenmauernformat.
- 3er-Mauern sind gut geeignet, um bei sehr überschaubarem Rechenaufwand (der Kindern mit rechnerischen Schwierigkeiten zugute kommt) nahezu die gesamte Fülle von Mustern im Zusammenhang mit Zahlenmauern zu erkennen, zu bearbeiten, zu diskutieren und zu nutzen.
- Weitere Mauerngrößen rechtfertigen sich durch strukturelle Unterschiede zwischen Mauern geradzahliger und ungeradzahliger Höhe. 4er-Mauern (als geradzahlige Vertreter) haben dabei ebenfalls noch einen vertretbaren rechnerischen Aufwand. Ihre Muster lassen sich gut mit den ungeradzahligen Mauerngrößen (3er oder 5er) vergleichen: Welche Gemeinsamkeiten gibt es? Was ist übertragbar, was nicht? Warum ist das so? Auf derartige Fragen greifen später einige Forschungsaufträge im Modus *Forschen* zurück.
- Die letzte im ZAHLENFORSCHER angebotene Mauerngröße (5er-Mauern) kann man als eine pragmatische Obergrenze verstehen. Hier beginnt das Verhältnis von Rechenaufwand und Muster-Ergiebigkeit langsam zu kippen, mit anderen Worten: Für die Mustererzeugung, -vielfalt und -diskussion bringen größere Mauern (und auch größere Zahlenwerte) keinen Mehrwert. Die Palette von 3er-, 4er- und 5er-Mauern erlaubt es aber zu erkunden, wie erkannte Muster über wachsende Mauerngrößen hin zusammenhängen. Und ne-

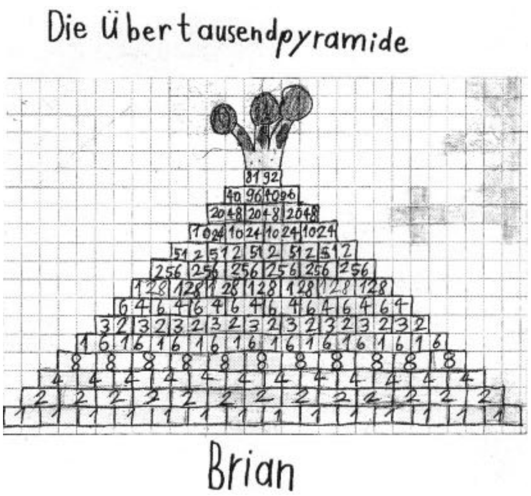
ben dem Vergleich von ›ungeraden‹ (3er) und ›geraden‹ (4er) Mauern lassen sich auch zwei Mauerntypen gleicher Parität (3er- und 5er-Mauern) vergleichen.



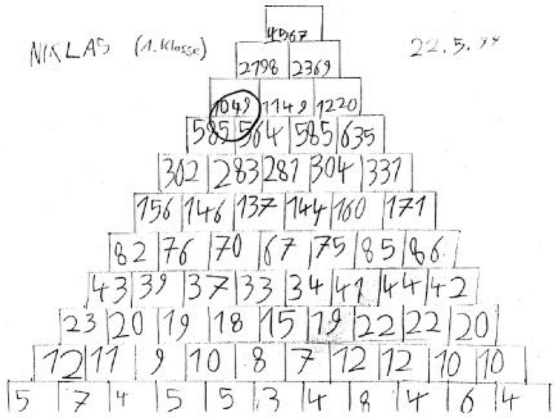
Modus *Selbst wählen*

Unbenommen von dieser programmseitigen Eingrenzung auf 3er- bis 5er-Mauern steht es natürlich immer frei, auch größere Mauern zu untersuchen. Der ZAHLENFORSCHER selbst ermuntert an einigen Stellen zu *Papier-Bleistift*-Experimenten. Denn nicht alles muss mit dem Computer geschehen! Gerade unter dem Aspekt des Selbst-Wählens entwickeln Kinder ja nicht selten auch Lust und die (selbst gewählte) Anforderung, übergroße Mauern anzulegen und rechnerisch zu bewältigen, wie die beiden folgenden Abbildungen zeigen.

Selbst gewählte Anforderungen:



aus: Hecker 2004, 97



aus: Krauthausen/Scherer 2003, 130

1.2.4 Modus *Forschen*: Schwerpunkt Problemlösen/Mathematik-Treiben

Zur Relevanz der Forscher-Metapher für Unterricht

Dieser Modus war als Namensgeber für das Programm mit ausschlaggebend. Er stellt den zentralen und eigentlich innovativen Part der Software dar. Es geht v. a. um die Auseinandersetzung mit gehaltvollen Forschungsfragen rund um Zahlenmauern. Die gewählte Forscher-Metapher ist dabei ernst gemeint. Sie ist weder Marketing-Attitüde noch kindertümelndes ›Rollenspiel‹.

Vielmehr weisen das (natürliche) Mathematik-Treiben von Kindern wie von forschenden Mathematikern in der Tat weit reichende Parallelen auf. Es handelt sich, wie Dewey (1976) es einmal genannt hat, um eine vergleichbare Aktivität an lediglich verschiedenen Stellen des Entwicklungsprozesses. Und manchmal sind diese Orte gar nicht so weit voneinander entfernt, wie man meinen mag:

In Sachen Primzahlen oder vollkommene Zahlen oder Palindrome (vgl. Winter 1986) können Grundschulkinder Fragen stellen, die Erwachsene, ja manchmal nicht einmal Mathematiker imstande sind zu beantworten (vgl. Hoffmann 2001, 64). Diese Tatsache für das Mathematiklernen in der Schule stärker als bisher fruchtbar zu machen, die Forscher-Metapher also zu stärken und zum *Bestandteil der Unterrichtskultur* zu machen, kann als ein vorrangiges Anliegen der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts (wie der Lehrerbildung!) verstanden werden.

Das Angebot der Forschungsaufträge

Aufgabenformate wie die Zahlenmauern sind u. a. dadurch charakterisiert, dass sie bei einfach zu verstehendem Grundformat eine Vielzahl gehaltvoller Forschungsfragen ermöglichen (vgl. Krauthausen 1998, 120-128), die sich ohne einen unverhältnismäßigen Aufwand an Materialerstellung in flexibler Weise an die unterschiedlichsten Lernstände anpassen lassen. Im ZAHLENFORSCHER werden zehn plus ein Forschungsaufträge angeboten – übersichtlich dargestellt und per Klick auszuwählen an einer Pinnwand mit entsprechenden Auftragszetteln. Zehn plus einer insofern, als der letzte, farblich etwas abgesetzte Auftrag zu ›Nullmauern‹ eine Variation der Regel beinhaltet, die sich von allen anderen Forschungsaufträgen und Programm-Modi unterscheidet (Unterschiede statt Summen; vgl. 5.2.11).

Modus *Forschen*

Offenheit der Forschungsaufträge

Das Angebot versteht sich, bei gleichzeitig klarer inhaltlicher Rahmung, in mehrerlei Hinsicht als offen:

- Es wird bewusst *keine Schwierigkeitsstufung* vorgegeben. Weder die Reihenfolge der Auftragszettel noch die Farbe ihrer Nadeln beinhalten irgendeine Information über den Anforderungsgrad. Und zwar, weil der Schwierigkeitsbegriff als solcher ein subjektiver ist.

Außerdem beeinflussen die sehr unterschiedlichen Bearbeitungsweisen und -tiefen sowie verschiedene denkbare Hilfsmittel den Schwierigkeitsgrad, der sich auch deswegen einer einfachen Zuschreibung entzieht:

Sollten die Rechenfertigkeiten eines Kindes noch eingeschränkt sein, dann kann jeder Forschungsauftrag auch im Zahlenraum oder in der Mauerngröße angepasst werden. Alle Forschungsaufträge lassen sich auch unterschiedlich weit bearbeiten: Für manchen mag es angesichts des aktuellen Leistungsvermögens bereits ein Erfolg sein, einige Zahlenmauern korrekt berechnet oder ein Muster erkannt zu haben – es aber derzeit vielleicht noch nicht (zumal verbal oder schriftlich) beschreiben zu können. Das konsistente Fortsetzen erkannter Muster ist aber auch schon ein Beleg für Verstehen! Andere Kinder werden weiter vordringen, vielleicht sogar das Muster begründen können. Auch die verwendeten Hilfsmittel beeinflussen den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe usw.

- Des Weiteren gibt es bewusst *keine Bindung an bestimmte Jahrgangsstufen*. Während der Entwicklung des ZAHLENFORSCHERs wurden alle Forschungsaufträge auch ohne Computer im Unterricht mehrfach und unter verschiedensten Rahmenbedingungen in den Jahrgangsstufen 1-6 sowie in der Förderschule (LB) erprobt. Diese Erfahrungen haben gezeigt, dass eine eindeutige Zuweisung der Aufträge zu bestimmten Schuljahren keinen Sinn macht (Bissinger 2005). Es liegen u. a. Dokumente vor, wie ein und derselbe Forschungsauftrag gleichermaßen von Zweit- wie von Fünftklässlern erfolgreich bearbeitet wird, und ebenso von Lehramtsstudierenden – jeweils auf den entsprechenden Niveaus, mit durchaus erstaunlichen Übereinstimmungen und auch Unterschieden bzgl. der Herangehensweisen, der Notation, des Umgangs mit Fehlern und Frustration sowie des Durchhaltevermögens … In gewissen Grenzen (s. u.) bzgl. der Rechenfertigkeit und der Vorerfahrungen im Umgang mit Mustern ist dann nahezu *jeder* der elf Aufträge prinzipiell für verschiedene Jahrgangsstufen oder Ausgangsbedingungen adaptierbar.

  Mit einer Einschränkung, die auch dafür verantwortlich ist, dass der ZAHLENFORSCHER seinen Einsatzbereich offiziell erst ab der 2. Klasse benennt: Mit Sicherheit lässt er sich im Modus *Rechnen* und *Selbst wählen* (und wäre es hier auch nur vorrangig von der Lehrperson zur Generierung von Arbeitsblättern) auch bereits in der zweiten Hälfte des 1. Schuljahrs nutzen. Auch haben wir einzelne Forschungsaufträge mehrfach in Anfangsklassen erfolgreich getestet. Andererseits sollte bedacht werden, dass v. a. im Modus *Forschen* nicht nur Rechenfertigkeiten gefordert sind, die in der 1. Klasse ja gerade erst grundgelegt und ausgebaut werden. Eine erfolgreiche Bearbeitung mit gewisser Tiefe, die die Potenz der Forschungsaufträge auszuschöpfen vermag, ist jedoch auch auf Problemlösefähigkeiten und -erfahrungen sowie metakognitive Kompetenzen und Aktivitäten (vgl. 2.4) angewiesen, die in der 1. Klasse im erforderlichen Ausmaß kaum schon vorausgesetzt werden können. Von daher schien es uns ehrlicher, einen Einsatz des ZAHLENFORSCHERs erst ab Jahrgangsstufe 2 zu empfehlen, denn die o. g. realistischen Möglichkeiten für

Klasse 1 stellen aufs Ganze der Programm-Optionen gesehen nur einen unverhältnismäßig kleinen Anteil dar.

> Im Sinne des Spiralprinzips (vgl. Krauthausen/Scherer 2003, 127 f.) ist es durchaus empfehlenswert, einzelne Forschungsaufträge in späteren Klassen erneut zu thematisieren. Erfahrungsgemäß werden die Bearbeitungen der Kinder dann strukturell angereicherter erfolgen und im Rückblick auf vergangene Bearbeitungen auch eigene Fortschritte dokumentieren können.

- Nicht zuletzt gibt es *keine Vorgaben über Lösungswege oder -methoden, Herangehensweisen und Materialeinsatz*. Die einzige durchgängige ›Vorgabe‹ besteht in der Ermunterung, die Arbeitsprozesse wie -ergebnisse begleitend im Forscherheft zu dokumentieren und abschließend im Ergebnis-Ordner aufzubereiten (vgl. *Wichtige Anmerkung für den Unterrichtseinsatz* auf S. 16 f.). Des Weiteren entscheiden die Lernenden selbst über jene Fragen, wie sie in 2.2 als Merkmal natürlicher Differenzierung ausgewiesen sind.

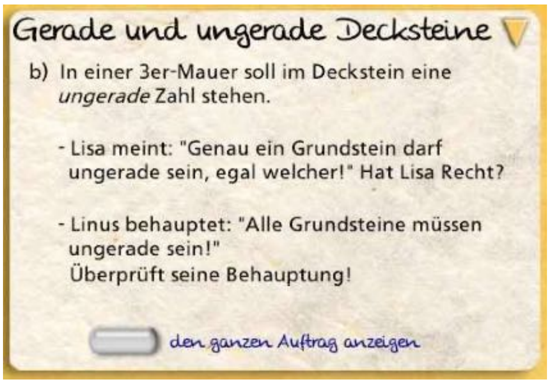
> Die Auswahl eines Forschungsauftrags erfolgt durchgängig nach dem gleichen Prinzip: Bei Klick auf den Auftragszettel wird zunächst der gesamte Auftrag inklusive aller Teilaufgaben angeboten. Hier kann dann durch erneuten Klick die gewünschte Fragestellung ausgewählt werden. Auf der entsprechenden Bearbeitungsseite steht der Auftragstext in einer aus-/einklappbaren Banderole am oberen Rand stets zur erneuten Einsicht oder Rückversicherung bereit, ebenso die für den jeweiligen Auftrag relevanten Werkzeuge.

Mathematik-Treiben als soziale Aktivität

Die Auftragstexte sind so formuliert, dass die Kinder im Plural angesprochen werden. Damit soll eine gemeinsame Arbeit (2-3 Kinder) an einer Forschungsfrage nahe gelegt werden. Das bedeutet nicht, dass alle zugleich am Computer beschäftigt sein müssen. Es wird grundsätzlich für sinnvoll erachtet, nicht alles und jedes – und auch nicht unbedingt von jedem Kind – am Computer oder innerhalb der ZAHLENFORSCHER-Software bearbeiten zu wollen oder zu müssen. Ein *sachgerechter* Medien- und Sozialform-Mix ist weitaus sinnvoller als ein Computer-fixiertes Vorgehen.

Das nahe gelegte gemeinsame Vorgehen aber ist ganz im Sinne der Forscher-Metapher, wo das Arbeiten an mathematischen Problemen auch ganz wesentlich ein kommunikativer Prozess ist! Das schließt Einzelarbeit in bestimmten Phasen nicht aus (z.B. Generierung von Beispielmaterial oder einstweiliges ungestörtes Nachdenken vor der gemeinsamen Weiterarbeit oder Diskussion).

Behauptungen, Vermutungen, Provokation



In einigen Auftragstexten treten ›virtuelle‹ Kinder mit gewissen Behauptungen oder Vermutungen auf, die es zu überprüfen gilt. Damit soll eine Lernkultur angeregt und gefördert werden, die durch eine Frage*haltung* geprägt ist. Die Kinder sollen lernen, weder leichtgläubig alles zu übernehmen oder für richtig zu halten, was andere sagen oder was geschrieben steht, noch sich selbst mit den erstbesten eigenen Ergebnissen zufrieden zu geben. Ziel ist es, selbst die Verantwortung für das eigene Tun und die so gewonnenen Ergebnisse zu übernehmen, was man nur tun kann, wenn man über Methoden der Selbstvergewisserung über die Richtigkeit verfügt (s. 2.4).

Die ›virtuellen‹ Kinder agieren dabei in Stellvertreterfunktion für die Lehrkräfte, denn diese haben »auch die Aufgabe, den Diskurs zu entfachen, dabei zu provozieren und zu pointieren sowie einem fachlichen und gedanklichen Niveau Geltung zu verschaffen« (Sjuts 2003, 24). Und so sind die Behauptungen der ›virtuellen‹ Kinder mal zutreffend (dann gilt es, dies zu begründen), mal nicht (dann gilt es, die Behauptung zu widerlegen). Manchmal sind sie auch nur teilweise zutreffend: Die gemachte Aussage kann für sich korrekt sein, aber noch nicht das Problem als Ganzes erklären – die Aussage ist also zutreffend, aber nicht hinreichend.

Das Forscherheft – work in progress

Das Forscherheft hat vorrangig *Notizbuch-Charakter*. Daher gelten hier eingeschränkte Anforderungen an Sachrichtigkeit, Rechtschreibung, Grammatik, Übersichtlichkeit u. Ä. (vgl. nebenstehende Abb. aus einer 2. Kl.). Und für externe Leser gilt der von Gallin/Ruf (1995) geforderte Respekt vor der Sprache einer ›Werkstatt des Lernens‹. Da der Werkstatt-Gedanke und die hier zugrunde gelegte Forscher-Metapher so plausibel zusammen passen, sei ein Abschnitt zitiert, den die Autoren als Mahnung an die Erwachsenen in ihrem Schulbuch abgedruckt haben (Ersetzen Sie gedanklich einfach ›Reisetagebuch‹ durch ›Forscherheft‹, und Sie haben die Botschaft.):

> »*Man darf allerdings nicht in der Rolle des geladenen Gastes verharren, der im aufgeräumten Wohn-*

> *zimmer empfangen werden will. Als Leserin oder als Leser eines Reisetagebuchs betreten Sie unangemeldet und unerwartet die Werkstatt eines lernenden Menschen. Unfertige Werkstücke versperren den Weg, darunter auch Fehlerhaftes oder Misslungenes. Leicht kann der Gast stolpern, sich an einem fremdartigen Werkzeug verletzen oder durch Rauch und Dämpfe gereizt werden; leicht übersieht er Kostbarkeiten, die da und dort unauffällig und vielleicht schon ein bisschen verstaubt herumstehen, und stösst sie achtlos um. Wer sich in der Werkstatt eines Lernenden umsieht, kann Zeuge einmaliger Ereignisse werden. Altbekannte Tatsachen erscheinen oft sogar für Fachleute in einem neuen Licht, wenn sie bei der Geburt der Erkenntnis dabei sind. Man darf allerdings über die Begleiterscheinungen des Gebärens nicht erschrecken. Und man darf auch elementare Regeln des Respekts nicht missachten*« (Gallin/Ruf 1995, 43).

Der Ergebnis-Ordner – bewusste Lernanlässe auf verschiedenen Ebenen

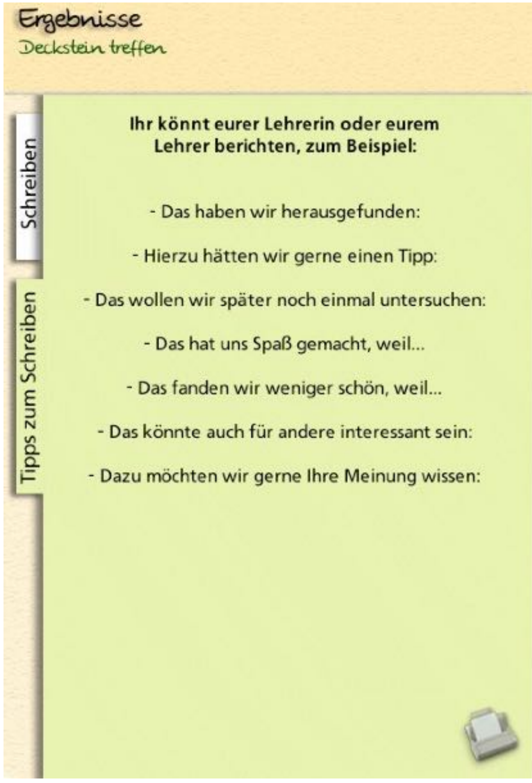
Wenn ein Werkstück vollendet, ein Forschungsauftrag gelöst ist, dann sieht die Werkstatt oder das Labor meist recht unaufgeräumt aus. Um das Ergebnis angemessen zu präsentieren, bedarf es daher einer Aufbereitung, die den *Adressatenbezug* und die *Gelegenheit* berücksichtigt. Man kann sagen, es handelt sich um eine *Publikation* im Sinne des Wortes, eine Ver-Öffentlichung. Und sobald man an die Öffentlichkeit tritt, gilt es auch, entsprechende Konventionen zu berücksichtigen:

- Ist mein Text verständlich, auch für Personen, die nicht beim Prozess anwesend waren?
- Ist er nicht zu kurz und nicht zu lang?
- Ist er gut gegliedert und dadurch in der Abfolge logisch?
- Ist er fehlerfrei (Grammatik, Rechtschreibung, Zeichensetzung)?
- Ist er sachgerecht veranschaulicht (hilfreiche Abbildungen/überzeugende Beispiele)?
- …

Hier wachsen Ziele des Mathematik- und des Sprachunterrichts zusammen, was auch die zeitlichen Bedarfe aufteilen hilft (vgl. Krauthausen 2005c und die dort angegebene Literatur).

Das entsprechende Werkzeug im ZAHLENFORSCHER ist der Ordner *Ergebnisse*. Analog zum Forscherheft enthält er eine Textspalte sowie eine (aus- und einklappbare) Spalte für illustrierende Beispielmauern, die sich per Mausklick aus der Arbeitsfläche herüber kopieren lassen (s. S. 30). Zudem stehen auf einer Reiterkarte Hilfen für den strukturellen Aufbau von Dokumentationen bereit, denn dies lernt man weder von alleine noch bringen Kinder die erforderlichen Qualifikationen schon mit. Wichtig ist hier wie anderswo erneut eine *bewusste Unterstützung und Förderung sowie die Bereitstellung entsprechender Kriterien*:

Ordner *Ergebnisse* (Adressatenauswahl)



Ordner *Ergebnisse* (Gliederungshilfen)

Denn ein gut gemeinter Tipp wie z.B. »Mach dir doch eine Skizze« ist erst dann wirklich eine Hilfe für das Kind, wenn es zuvor gelernt hat, was denn eine gute Skizze ausmacht, was sie von einer weniger guten unterscheidet (Gütekriterien?!) oder was sie von einer Zeichnung oder einem Gemälde unterscheidet. Analog hilft es dem Kind auch vergleichsweise wenig, wenn es dazu angehalten würde, im Ergebnis-Ordner »schön übersichtlich und verständlich« zu schreiben. Deshalb enthält die Reiterkarte zum unaufwändigen Nachschauen einige Leitfragen (keine Dogmen), denen nachzugehen unter den jeweiligen Bedingungen sinnvoll sein könnte.

Selbstverständlich kann das Kind auch eigene Überschriften nutzen oder hier vorgeschlagene übergehen. Viel entscheidender ist die Tatsache, dass durch solche *exemplarisch* zu verstehenden Beispiele ausdrücklich ein *Bewusstsein* dafür gefördert wird, dass gewisse Aspekte zu bedenken sind, wenn man mit den eigenen Texten den gewünschten Zweck bzw. auch die Adressaten erreichen möchte (vgl. 2.4: Metakognition).

Es sollen »Texte für Leser« werden (Boettcher et al. 1973). Und als potenzielle LeserInnen werden (wiederum exemplarisch) drei konkret benannt:

- Die Option *Für uns selbst* ist für den Fall gedacht, dass es für die Lernenden selbst ein wünschenswertes Bedürfnis werden soll, nach den noch unsortierten Werkstattberichten

(s. o.: Notizbuch-Charakter) das Ergebnis des eigenen Lernprozesses *für sich selbst übersichtlich geordnet* zusammenzustellen. Wenn man ausdauernd und angestrengt gearbeitet hat, macht es Freude und auch stolz, ein ›schönes‹ Endprodukt in Händen zu halten.

- Die Option *Für die Lehrerin* zielt auf ein Mitteilungsbedürfnis, das Geleistete auch der Lehrerin oder dem Lehrer zu zeigen. Hier treten bereits weitere Bedingungen für die Erstellung des Textes hinzu, denn dieser Personenkreis war i. d. R. nicht ständig präsent, was eine größere Sorgfalt z.B. im Hinblick auf Folgerichtigkeit, Nachvollziehbarkeit, Vollständigkeit oder Verständlichkeit beim Schreiben des Textes erfordert.
- Die Option *Präsentieren* zielt auf Erfordernisse, die sich ergeben, wenn die Forschungsergebnisse in einer Rechenkonferenz der Klassengemeinschaft vorgestellt werden sollen. Andere denkbare Situationen wären eine Mathematik-Ausstellung, eine Projektwoche o. Ä. Unter Umständen wird es dann weniger um die Produktion längerer Texte gehen, sondern vielleicht eher um die Gestaltung von Plakaten, Postern oder Overhead-Folien.

Der Lernbericht

Lernberichte »dienen

- der Förderung von Arbeitstechniken,
- der Förderung der Sachkompetenz, der Methodenkompetenz, der Sozialkompetenz,
- der Selbstkompetenz und
- dem Anliegen einer ganzheitlichen Beurteilung« (Affolter et al. 2003, 231).

Der Mathematikunterricht verfolgt damit die Aufgabe, Kinder zum eigenständigen Lernen zu befähigen. Über eigenständige Lerner und die in diesem Zusammenhang hochrelevante Fähigkeit zur Metakognition können Sie in Abschnitt 2.4 Näheres nachlesen.

Der *Lernbericht* im ZAHLENFORSCHER zielt auf die damit verbundenen Fähigkeiten und Aktivitäten, die durch eine durchgängige unterrichtliche Förderung metakognitiver Kompetenzen zu unterstützen sind. Seine Funktion wird darin gesehen, die Kindern durch ein einfaches Instrumentarium zu sensibilisieren und gleichzeitig die Lehrkräfte an die Bedeutung von Metakognition zu erinnern, so dass die damit verbundenen Kompetenzen explizit(er) als Bestandteil der Unterrichtskultur gefördert werden.

Der Lernbericht besteht aus einer Ankreuztabelle mit den durch drei ›Smileys‹ dargestellten Spaltenoptionen (vgl. 1.1) für *stimmt – na ja – stimmt nicht* sowie in der Zeilenstruktur durch vorformulierte Fragen zu relevanten metakognitiven Bereichen: Motivation, Verstehen, Ausdauer, Monitoring, Kooperation, Selbsteinschätzung, Planung u. Ä. Das leicht handhabbare Ankreuzverfahren hat aber auch den Nachteil, dass die Fragen in der Tabelle aus Platzgründen (sowie Gründen der Lesekompetenz der Kinder) möglichst kurz sein müssen. Um dadurch bedingte Einschränkungen zu relativieren, erlaubt ein (scrollbares) Textfeld auch die freie Texteingabe.

Der Lernbericht lässt sich ausdrucken (zum Abheften im ZAHLENFORSCHER-Ordner), auf der Festplatte abspeichern und von ihr hochladen. Dadurch kann er als Grundlage für Rechenkonferenzen oder Gespräche mit der Lehrerin bzw. dem Lehrer dienen. Dieser Nutzungszusammenhang ist wichtig zu betonen, denn alleine auf das bloße Vorhandensein der Option *Lernbericht* in der Software zu vertrauen und sich mit dem Ankreuzen der Fragen zu begnügen, wäre wenig zielführend. Die Entwicklung von Metakognition lässt sich nicht einfach an die Lernenden delegieren. »Selbstständiges Lernen erfolgt nicht dadurch, dass fremdgeleitetes Lernen schlicht vermindert wird, ja eine Überbetonung des eigenständigen Lernens verringert sogar dessen Wirkung« (Sjuts 2003, 20). Es bedarf also der didaktisch überlegten Integration des Lernberichts in das allgemeine Unterrichtskonzept (vgl. 2.4).

Lernbericht
Nullmauern
Lernbericht Lernbericht Forschen

	stimmt	na ja	stimmt nicht
Ich habe den Forschungsauftrag gern bearbeitet.			
Ich habe den Auftrag so gut verstanden, dass ich ihn auch anderen erklären könnte.			
Ich hatte gute Ideen, um anzufangen.			
Ich habe Ausdauer gehabt und nicht gleich aufgegeben.			
Ich habe gut mit anderen zusammengearbeitet.			
Ich konnte anderen helfen.			
Ich brauchte manchmal nur einen kleinen Tipp.			
Ich habe geprüft, ob mein Ergebnis sinnvoll sein kann.			
Ich habe Fehler untersucht und herausgefunden, wo und warum ich mich gerirrt habe.			
Ich konnte aus meinen Fehlern etwas lernen.			
Ich konnte Hindernisse überwinden.			
Ich habe erkannt, was ich noch üben muss.			
Ich habe mein Vorgehen und die Ergebnisse in einem kleinen Text erläutert.			
Ich habe am Ende noch einmal alles durchgesehen.			

Das möchte ich auch noch sagen:

2 Relevante fachdidaktische Konzepte

Dieses Kapitel richtet sich erstens an (angehende) Lehrerinnen und Lehrer. Für sie ist zu erwarten, dass bei der Lektüre der folgenden Abschnitte einschlägige Assoziationen und Verknüpfungen zu ihrem Professionswissen offenkundig werden. Die angebotenen Literaturverweise sind als Möglichkeit zur vertieften Beschäftigung mit den Fragestellungen gedacht.

Zweitens sollte die Handreichung möglichst aber auch für jene interessierten LeserInnen hilfreich sein, die nicht professionell im Lehrberuf tätig sind, den ZAHLENFORSCHER vielleicht im außerschulischen Rahmen einsetzen und sich ein wenig mehr über zeitgemäßen Mathematikunterricht informieren möchten.

> Das Lesen der Handreichung kann durchaus selektiv erfolgen. Der ZAHLENFORSCHER selbst ist so konstruiert, dass sich die Software auch ohne ausgewiesene fachdidaktische Expertenschaft sinnvoll einsetzen lässt, da in seine Entwicklung ein hohes Maß an ›interner fachdidaktischer Expertise‹ eingeflossen ist. Insofern versteht sich die Handreichung als (hoffentlich hilfreiches) Zusatzangebot und Referenzmedium.

2.1 Das zugrunde gelegte Verständnis vom Lehren und Lernen

Wissen gilt als (prinzipiell) nicht vermittelbar

Dem ZAHLENFORSCHER liegt ein Verständnis von Lehren und Lernen zugrunde, das sich seit dem Ende der 1980er Jahre weltweit und zunehmend in allen Schulformen (wenn auch sicher noch nicht überall so tief greifend und konsequent wie bislang in der Grundschule) als zeitgemäß herausgestellt hat und inzwischen durch internationale empirische Forschung umfassend bearbeitet und bestätigt wurde.

Man kann heute ohne weiteres von einem breiten Konsens sprechen, dass Lernen nicht durch didaktische oder methodische Einflussnahme erzwungen werden kann. ›Verfügungsfantasien‹ (Combe 1996) von Lehrenden über Lernende sind eine Illusion! D.h. *keine* Lehrmethode kann determinieren oder garantieren, dass ein Kind das lernt, was die Lehrperson beabsichtigt. Die sog. *broadcast*- (Rundfunk-)Metapher, bei der die Lehrperson den ›Sendemast‹ darstellt und die Kinder die Empfänger, hat sich bei genauerem Hinsehen immer zuverlässiger als unwirksam herausgestellt. Man geht heute davon aus, dass es *aus prinzipiellen Gründen* nicht möglich ist, Lerninhalte aus dem Kopf von ›Wissenden‹ in die Köpfe von Lernenden zu übertragen – erst recht nicht verlustfrei. Auch der Nürnberger Trichter ist also nur eine Illusion.

Nun mag man als Erwachsener der Meinung sein, dass man doch schließlich auch das Einmaleins, die Rechenverfahren und vieles mehr im Mathematikunterricht gelernt hätte – auch ohne diese ›neuen Methoden‹ und Einsichten. Dazu zwei Antwortangebote:

1. Die Verknüpfung von *Lernen und Unterricht* ist weniger zwingend als man glaubt: Lernen ist nicht nur als Folge von Unterricht vorstellbar bzw. Unterricht ist keine notwendige Voraussetzung für Lernen! Auch bei einem ›traditionellen‹ Unterricht (ebenso übrigens wie bei einem schlechten ›modernen‹) lässt sich nicht *vermeiden*, dass Menschen lernen. Denn manchmal lernt man eben auch *trotz* Schule oder *trotz* LehrerIn – meist dann, wenn parallel einige der u. g. günstigen Bedingungen bestehen (z. B. Sachinteresse und/oder gehaltvolle Lernumgebung/Aufgabenstellung).
2. Es gibt einen Unterschied zwischen *Lernen* und *Merken*. In der Tat kann man durch das traditionelle Vorgehen an vielen Stellen den (vordergründigen!) Eindruck erwecken, dass Lernen stattgefunden hat – oder vielmehr das, was man dafür hält: Wenn mir die auswendige und prompte Verfügbarkeit aller Einmaleinsreihen als Lernergebnis genügt, dann kann der Lehr-Lernprozess ganz anders (einfacher) gestaltet werden, als wenn ich den Anspruch moderner Lehr- und Bildungspläne vertrete, dass *zusätzlich* und vor der Automatisierung der Einmaleinssätze auch Einsichten in strukturelle Zusammenhänge zwischen und innerhalb der einzelnen Reihen (Nachbaraufgaben, Verdopplungs-/Halbierungsaufgaben, Fastverdoppeln/-halbieren) sowie Gesetzmäßigkeiten der Multiplikation verfügbar und v. a. auch zum *geschickten* Rechnen souverän nutzbar sind (operative Variation; Kommutativität, Assoziativität; Distributivität; Konstanzsätze; vgl. z. B. Kap. 1.1.6 in Krauthausen/Scherer 2003).

Lehramtsstudierende machen in Lehrveranstaltungen nicht selten die überraschende Erfahrung, dass sie gewisse Standardinhalte der Grundschule manchmal doch nicht *wirklich* verstanden haben – jedenfalls nicht so weit, wie es für professionellen Unterricht erforderlich wäre. Und auch mancher Erwachsene wird noch problemlos eine binomische Formel (meist die erste) aufsagen, in der Regel aber weder erklären können, wie sie zustande gekommen ist, noch was sie eigentlich bedeutet und wozu sie etwa gebraucht wird. In solchen Fällen würde man nach vorliegendem Verständnis nicht von einem erfolgreichen ›Lernprozess‹ sprechen. Denn das Lernprodukt ist allenfalls wie ein ›Gedicht‹ reproduzierbar, das man ggf. auch besinnungs-los aufsagen kann. Lernen im eigentlichen Sinne würde aber bedeuten, dass man entweder den Sinn und das Zustandekommen der Formel noch erklären könnte oder zumindest in der Lage wäre, es – nach längerem Nichtgebrauch und demzufolge völlig normalem Vergessen – mit geeigneten Vorstellungsmitteln wieder zu re-konstruieren.

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Der ZAHLENFORSCHER ist kein ›Lernprogramm‹, mit dem sich Lernen zwingend herbeiführen ließe. Er versteht sich als *Lernumgebung*, die einen möglichst günstigen und v. a. fachdidaktisch abgesicherten Organisationsrahmen absteckt, um die *Wahrscheinlichkeit* zu erhöhen, dass sich Lernen im Sinne wirklichen *Verstehens und vernetzten Denkens* ereignen kann sowie Lernfreude und Selbstvertrauen gefördert werden.

Wenn Wissen auch nicht direkt vermittelbar ist, weil das Lernen nun einmal im Kopf der Lernenden stattfindet, auf den Lehrende naturgemäß keinen ›Zugriff‹ haben, so gibt es allerdings gewisse Rahmenbedingungen oder Voraussetzungen, die dem Lernen eher förderlich sein können als z.B. andere. Und *hier* setzt die professionelle Verantwortung der Lehrerinnen und Lehrer ein.

Eine günstige Bedingung für Lernen: Interesse an der Sache

Eine unmittelbar jedem einleuchtende Voraussetzung ist das Interesse des Lernenden an der Sache. Was mich interessiert, dem bin ich eher gewillt, Aufmerksamkeit zu widmen (Motivation). Wenn mich etwas interessiert, dann halte ich auch noch durch, wenn der Lernweg sich einmal eine Weile als etwas steinig und beschwerlich herausstellt (Ausdauer und Durchhaltevermögen). Denn ich weiß, dass ich mein Ziel prinzipiell erreichen kann. Im Unterschied zu Dingen, die mir anstrengungslos in den Schoß fallen, ist *gerade* nach überwundener Anstrengung das Erfolgsgefühl am größten (Kompetenzerfahrung). Dazu haben Sie sicherlich Erinnerungen an eigene Lernerfahrungen – nicht einmal unbedingt nur in schulischen Kontexten, aber das spielt hier keine Rolle. Und wahrscheinlich sind das eher angenehme als unangenehme Erinnerungen.

Aber wenn die Kinder kein Interesse an der Mathematik haben? Sind dann alle Inhalte tabu, für die sie sich nicht sofort und aus freien Stücken interessieren? Keineswegs. Schule und Unterricht haben auch die Aufgabe, (neues) Interesse zu *wecken* und keine ›Anbiederung an den Publikumsgeschmack‹ zu betreiben. Der Mentalität des schnellen ›Weg-Zappens‹ muss die Alternative von Ausdauer und Anstrengung gegenüber gestellt werden (vgl. Bildungspläne). ›Widerständige‹ Probleme mit *positiven* statt negativen Gefühlen zu besetzen, ist ein Ziel pädagogischer Arbeit, wenn man die Fähigkeit zu Ausdauer und Durchhaltevermögen (sich auch mal in ein Problem ›verbeißen‹ können) im Blick hat. »Eine alte mathematische Weisheit besagt: Probleme, die einen Angriff wert sind, beweisen ihren Wert, indem sie zurückschlagen« (Hoffmann 2001, 99). Dem dann nicht auszuweichen, sondern sich zu stellen und ›dagegen zu halten‹, ist absolut im Sinne der Forscher-Metapher: Es zeichnet WissenschaftlerInnen wie auch die Lernenden in der Schule aus. Auch bereits in der Grundschule. Denn nicht umsonst sind die in Klammern gesetzten Begriffe des vorletzten Absatzes so oder ähn-

lich in vielen Richtlinien, Lehr- oder Bildungsplänen für diese Schulstufe als Zielbeschreibungen zu finden.

Was aber ist wiederum Voraussetzung für ein solches Interesse? Diese Frage lässt sich hier nicht erschöpfend beantworten. Ganze Forschungsrichtungen unterschiedlicher Disziplinen befassen sich damit. Wenn wir uns aber auf jene Bereiche und Möglichkeiten konzentrieren, die etwa eine gut ausgebildete Lehrerin oder ein ebensolcher Lehrer direkt beeinflussen können, also die *didaktischen Optionen*, dann lässt sich u. a. einer der hilfreichen Faktoren benennen, der Interesse binden oder erzeugen helfen kann.

Eine günstige Bedingung für Lernen: Substanzgehalt

Diese Bedingung lässt sich auf einen kurzen Satz bringen: *An der Sache muss etwas dran sein!* Das gilt für das Mathematiklernen ebenso wie überhaupt im ›richtigen Leben‹: Kinder wie Erwachsene merken i. d. R. sehr schnell, wenn man ihnen eine *Mogelpackung* unterzuschieben versucht. Das ist dann der Fall (vgl. Art. 18 der Deklarationsverordnung für Waren), wenn die Verpackung (wörtlich oder sinnbildlich) durch ihre Größe oder Aufmachung oder Beschriftung über die Menge der darin enthaltenen Ware täuscht. Und Mathematik wird im Unterricht manchmal in aufwändigen und – gemessen an der enthaltenen Sache überdimensionierten oder ablenkenden – ›Verpackungen‹ angeboten. Das können erdachte Rahmenhandlungen sein: Märchen, Abenteuergeschichten oder *irgendwelche* Kontexte, die mit der Mathematik an sich gar nichts zu tun haben.

Dieses Grundmuster kann man – in den verschiedensten Ausprägungen versteht sich – im computerfreien Unterricht und auch in Schulbüchern beobachten. Insbesondere aber ist es ein gängiges Konstruktionsprinzip bei der übergroßen Mehrheit der Softwareprogramme für die Grundschule, die sich damit an (verkaufsträchtige) Praktiken von Bildschirmspielen anzuhängen versuchen (z.B. jk 2005).

Übrigens sind Grundschulkinder so dumm nicht! Sie durchschauen das Spiel. Sie spielen zwar mit, weil sie unterschwellig sehr schnell lernen, wie Unterricht funktioniert bzw. anscheinend funktionieren soll. Aber sie spielen auch nur mit für den Preis, dass Lehrerinnen und Lehrer die Schraube des ›Sensationellen‹, Bunten, Lauten und ›Großartigen‹ immer weiter drehen. Als Lehrpersonen haben Sie allerdings Einfluss auf die Entscheidung, ob Sie das wollen!

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Der ZAHLENFORSCHER verzichtet bewusst und konsequent auf nicht von der Sache her notwendige Rahmenhandlungen, Gimmicks, Hotspots und Klangteppiche. Er vertraut auf die Kraft und Eigendynamik der Mathematik selbst. Er ist ein ›ruhiges‹ Programm, wie es – getreu der für den Titel gewählten Metapher – der Arbeitsumgebung eines Forschers entspricht. Die implementierte Tonausgabe (abschaltbar oder wahlweise über Kopfhörer)

wird alleine zur Versprachlichung von Hilfen, Aufgabentexten oder neuen Impulsen zum Weiterlernen genutzt. Dies dient dem Verständnis jener Kinder, deren Lesefähigkeit noch nicht weit genug entwickelt ist, die aber gleichwohl die mathematischen bzw. heuristischen Anforderungen erfüllen können.

Aber auch gehaltvolle Angebote sind kein Selbstläufer! Man kann auch das Format der Zahlenmauern als Mogelpackung fahren, z.B. wenn man sie lediglich als *Trägermedium* für Aufgaben benutzt, die sich aber ansonsten kaum von der traditionellen reproduktiven Unterrichtspraxis unterscheiden: So ist ein Arbeitsblatt mit *irgendwelchen* vorgegebenen Zahlenmauern denkbar (womöglich sogar ausschließlich komplett vorgegebene Grundreihen; vgl. Beispieltyp *A* im Modus *Regel*), die die Kinder dann ›abrechnen‹ – und fertig. Zahlenmauern, wie sie im ZAHLENFORSCHER aufbereitet sind, folgen ganz offenkundig einem anderen Konzept (vgl. zum Aufgabenpool in 1.2.2 sowie die Ausführungen in 2.3).

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Der ZAHLENFORSCHER benutzt die Zahlenmauern nicht als Trägermedium für willkürliche und inhaltlich arme Fertigkeitsübungen. Er schöpft die diesem Aufgabenformat inhärenten mathematischen Möglichkeiten aus. Und zwar nicht durch eine schlichtes Erhöhen der Rechenanforderungen, sondern durch vielfältige Gelegenheiten zum Mathematik-Treiben und zum Nachdenken über mathematische *Muster* im Rahmen der einzelnen Fragestellungen. Rechen*fertigkeiten* werden dabei gleichwohl mit gefördert (vgl. auch Kasten auf S. 46).

Eine günstige Bedingung für Lernen: Selbsttätigkeit

Neben der sachlichen (= mathematischen) ›Aufladung‹ und aufgrund der Nicht-Vermittelbarkeit von Wissen (s. o.) gibt es eine weitere fundamentale Forderung im Rahmen eines zeitgemäßen Lehr-Lernverständnisses: Lernen ist umso wahrscheinlicher und erfolgreicher, je stärker es eine selbstständige Auseinandersetzung mit gehaltvollen Lernumgebungen (statt Vormachen/Nachmachen) ermöglicht. Lernende müssen Zeit und Raum erhalten, sich die Lerninhalte durch aktiv-entdeckende Auseinandersetzung zu erarbeiten. Der Nobelpreisträger Richard Feynman sagt es so: *»What I do not create, I cannot understand.«*

Lehrende haben dann die Aufgabe, nicht den Stoff *an* die Lernenden zu vermitteln, sondern *zwischen* Lernenden und Stoff zu vermitteln. Das heißt: die Lernangebote so aufzubereiten und den Lernprozess so zu organisieren, dass Lernen im genannten Sinne gefördert wird. Lehrende können (und müssen) im Rahmen ihrer didaktischen Expertenschaft und Verantwortung das Lernen organisieren, sie können aber niemanden ›lernen *machen*‹. Und eine weitere Implikation hat dieses Lehr-/Lernverständnis: Mathematiklernen wird hier als Prozess verstanden, »bei dem sich zunächst das Kind der Lehrerin verständlich macht – nicht umgekehrt. Das ist eine radikale Wende: Die Pflicht zu verstehen wird vom Schüler auf die Lehrerin übertragen« (Wielpütz 1998, 10).

Dieses konzeptionelle Verständnis, das inzwischen durch vielfache Untersuchungen theoretisch und praktisch erforscht und bestätigt wurde – auch übrigens seine Gültigkeit für sog. ›lernschwache Kinder‹ (vgl. z.B. Scherer 1994 & 1995; Moser Opitz 1999 & 2002) – hat seit Jahren Einfluss in die Unterrichtspraxis und neue Schulbücher gefunden, ebenso wie in die Lehrerbildung (Wittmann/Müller 1990/1992; Radatz et al. 1996/1998/1999; Schipper et al. 2000; Krauthausen 1998a; Krauthausen/Scherer 2003).

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Die *Organisation der Lernprozesse* erfolgt im ZAHLENFORSCHER durch eine fachdidaktisch begründete *Grobstrukturierung* (4 Programm-Modi), durch die unterschiedlichen Phasen eines Lernprozesses Raum gegeben wird. Des Weiteren wurde jeder Programm-Modus nach spezifischen fachdidaktischen Kriterien *feinstrukturiert*, ohne dabei die Ganzheitlichkeit und Offenheit der Lernumgebung aufzugeben (Konstruktion der Aufgabenpools für den Modus *Rechnen*; Freiheitsgrade für den Modus *Selbst wählen*; Konstruktion der Forschungsaufträge im Modus *Forschen*). Der ZAHLENFORSCHER verfolgt eine »Offenheit mit Konzept« (vgl. Selter 1997).

Ganzheitliches Lernen an offenen Aufgabenstellungen

Viele Erwachsenen werden sich noch daran erinnern, wie sie in der Grundschule das Einspluseins gelernt haben: Es wurden zunächst die Zahlen eine nach der anderen ›eingeführt‹, dann wurden einfache Plusaufgaben (erst bis 5, dann bis 10, später erst bis 20) gerechnet, dann die so gefürchtete Zehnerüberschreitung – im manchmal wahrsten Sinne des Wortes – ›problematisiert‹ (vgl. Krauthausen 1995a), und schlussendlich kam man zum Addieren im gesamten 20er-Raum. Aufgaben wurden meist von der Lehrperson bzw. durch das Schulbuch vorgegeben, und die Kinder hatten die Aufgabe, diese langsam aber sicher zu verinnerlichen (auswendig zu lernen) und bei Bedarf reproduzieren zu können.

7 – 3 =	*5 + 5 =*	*4 – 1 =*	*3 + 1 =*
9 – 4 =	*7 + 1 =*	*10 – 3 =*	*7 + 2 =*
10 – 5 =	*5 + 4 =*	*8 – 4 =*	*3 + 3 =*
8 – 1 =	*4 + 3 =*	*6 – 3 =*	*4 + 4 =*
3 – 2 =	*4 + 2 =*	*9 – 2 =*	*7 + 3 =*

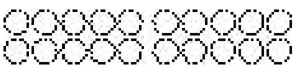
Ein Beispiel für diese Auffassung sind etwa die o. g. Rechenpäckchen, die man so oder ähnlich durchaus auch heute noch in manchen aktuellen Schulbüchern findet. Konstituierend für das gestufte, schwierigkeitsisolierte und fertigkeitsorientierte Vorgehen ist dabei:

- Addition und Subtraktion werden je für sich in separaten Päckchen geübt.

Postulat heute: integriertes Üben beider Operationen, um ihre Zusammenhänge und strukturellen Relationen deutlich und nutzbar werden zu lassen.

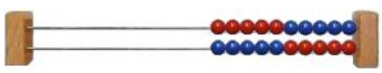
- Zunächst werden ausgiebig Aufgaben ohne Zehnerüberschreitung geübt, dann Aufgaben, die den Zehner auffüllen, und erst dann werden auch Aufgaben über den Zehner gerechnet (bevorzugt mittels Teilschrittverfahren).
  Postulat heute: sofortige Öffnung des 20er-Raumes als Angebot und Berücksichtigung auch anderer Strategien der Zehnerüberschreitung (z.B. (Fast-)Verdoppeln oder Kraft der 5; vgl. Krauthausen 1995a).
- Die einzelnen Aufgaben innerhalb eines Rechenpäckchens sind willkürlich gestellt, sie stehen in keinem strukturellen Zusammenhang.
  Postulat heute: bewusstes Nutzen struktureller Zusammenhänge für das operative Üben.
- Das Aufgabenangebot ist ›geschlossen‹, es gibt nur eine richtige Lösung und meist auch ein vorgeschriebenes Verfahren.
  Postulat heute: Öffnung der Aufgaben hin zu Lernumgebungen mit offenen Vorgehensweisen, u. U. mehreren Ergebnissen und auch Rechen*fähigkeiten* (geschicktes Rechnen) einschließende Zielsetzungen.

Gegenüber einem solchen reproduktiven, passivistischen Verständnis des Lernens wird seit Jahren eine aktivistische und ganzheitliche Vorgehensweise praktiziert: Der Lerninhalt, das Einspluseins im 20er-Raum, wird nicht mehr in isolierte Lernatome zerlegt, sondern den Lernenden ganzheitlich präsentiert und z.B. symbolisiert durch die strukturelle Darstellung des 20er-Feldes, der Einspluseins-Tafel (vgl. Wittmann/Müller 1990) oder des Rechenrahmens (vgl. Radatz et al. 1996).



20er-Feld

Einspluseins-Tafel



20er-Rechenrahmen

Das bedeutet nicht, dass jetzt *alle* Kinder *sogleich* bis 20 rechnen müssen (wo doch jede Lehrperson weiß, dass immer wieder auch Kinder in einer Eingangsklasse sitzen können, die noch große Probleme haben, bis 10 zu zählen). Die ganzheitliche Öffnung des 20er-Raumes versteht sich als eine *Option*: Jedes Kind kann sich in diesem Rahmen so weit bewegen, wie es sich zutraut bzw. jedes Kind kann seinem Leistungsvermögen entsprechend gefördert werden – aber eben an den *prinzipiell gleichen* Aufgabenstellungen. Diese sind dann auch keine Zufallspäckchen mehr, sondern didaktisch wohlüberlegte Aufgabenserien, die in einem *strukturellen Zusammenhang* stehen, um die notwendige inhaltliche Substanz zu gewährleisten, ohne die Lernen (ob von Mathematik oder anderem) eben weniger interessant ist.

Eine besondere Rolle in diesem Konzept spielen zudem die sog. offenen Aufgabenstellungen, wie etwa folgende:

1. Finde möglichst viele Plus-Aufgaben mit dem Ergebnis 10 (oder 15 oder 20 oder zu einer selbst gewählten Zahl)!
2. Wie viele kannst du jeweils finden? Fällt dir an den Aufgaben etwas auf? (Sortiere!)
3. Schreibe fünf leichte und fünf schwere Plus-Aufgaben auf!

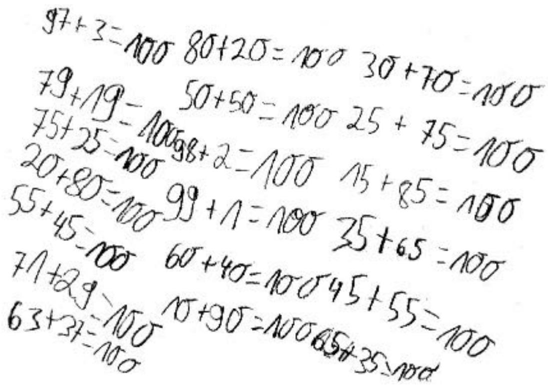
Solche offenen Aufgabenstellungen haben gegenüber vorgefertigten Rechenpäckchen aus dem Schulbuch den großen Vorteil, dass sie die Kinder, gleich welchen Leistungsstandes, kaum mehr unter- noch überfordern können. Aufgabenpäckchen, die in keinem inhaltlichen Zusammenhang stehen, kann das Kind entweder leisten oder nicht. Auch manche Softwareprogramme verkaufen es als ›Vorteil‹, dass die Aufgabendarbietung durch einen *Zufallsgenerator* erfolgt! Für didaktisch professionell geschulte Lehrerinnen und Lehrer ist klar, dass gerade dies eher ein gravierender *Nachteil* ist und sich unter heutigen Gütekriterien gewiss schon lange *nicht* mehr als Marketing-Argument eignet.

Die Päckchen unter der o. g. Aufgabe 1 oder 3 *können* aber kaum *über*fordern. Sie vermitteln vielmehr *jedem* Kind die für das Lernen so unerhört wichtigen Erfolgserlebnisse, weil das Anspruchsniveau selbst gewählt und dem eigenen Vermögen oder Zutrauen angepasst werden kann – vom Lernenden selbst! Zudem erhält die Lehrperson durch solche offenen Aufgabenstellungen unerlässliche Informationen über den individuellen Leistungsstand und damit für sinnvolle Hilfen oder Fördermöglichkeiten.

Aufgabenstellungen wie die o. g. können auch kaum *unter*fordern, weil sie – entsprechend gewählt, wie z.B. in der o. g. Aufgabe 2 oder 3 – auch für die begabtesten Kinder einer Klasse hinreichend ›Futter‹ bieten: Denn immer dann, wenn das Rechnen selbst keine großen Probleme mehr macht, lassen sich bei geeigneten Lern- oder Aufgabenumgebungen (s. u.) in unaufwändiger Weise weiterführende Fragen anschließen, bei denen es um *Beziehungen* zwischen den einzelnen Aufgaben oder um die *Beschreibung, Erklärung und Begründung von Mustern oder Gesetzmäßigkeiten* geht. Dafür geeignete Aufgabenstellungen, wie es z.B. die Zahlenmauern im Programm ZAHLENFORSCHER deutlich machen können (Modus *Selbst wählen*; Modus *Forschen*), lassen sich auf jedes Anspruchsniveau sowohl nach unten wie nach oben flexibel anpassen.

Die Potenz offener Aufgabenstellungen lässt sich exemplarisch durch das nachfolgend abgebildete Beispiel dokumentieren (aus: Scherer 1995, 207). Der Auftrag lautete: »Finde Plus-Aufgaben mit dem Ergebnis 100!« Wer sich die Mühe einer genaueren Analyse dieses Dokumentes macht, der wird eine Vielzahl an Informationen darüber gewinnen, was dieses Kind

bereits kann und wie es noch zu fördern wäre. Es zeigt aber gleichzeitig auch, wie geschult der Blick der Lehrkräfte sein muss, um diese Vielfalt tatsächlich zu erkennen. Welche Aufgabentypen etwa hat das Kind hier realisiert? Gibt es noch andere? (vgl. ebd.).



Bei offenen Aufgabenstellungen sind durch die veränderten Anforderungen zweifellos die Rollen der Lehrpersonen und der Lernenden tangiert. ›Veränderte‹ Anforderungen heißt aber nicht zwingend ›zu hohe‹ Anforderungen, höchstens ›noch ungewohnte‹ Anforderungen. Dass eine Umstellung auf ein verändertes Unterrichtskonzept (inkl. einem entsprechendem Konzept von Leistungsmessung) möglich ist, zeigt der überzeugende Erfahrungsbericht von Kathy Lawrence (Leatham et al. 2005). Hierin wird deutlich, dass neben der wachsenden Souveränität der Lehrerin, von der auch die Freude am eigenen Tun profitiert, es den Kindern gelingen kann, aus einer traditionell geprägten Unterrichtserfahrung beeindruckende Fortschritte zu machen, was die Selbstverständlichkeit des Begründens, des Verfassens mathematischer Texte und der Etablierung einer Fragehaltung im Rahmen einer wünschenswerten Unterrichtskultur betrifft.

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Die Zahlenmauern im ZAHLENFORSCHER werden bewusst nicht nach dem Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten angeboten, und auch nicht nach dem Prinzip vom ›Leichten‹ zum ›Schweren‹ (beides subjektive Begriffe). Im Modus *Forschen* haben die Lernenden weitgehenden, im Modus *Selbst wählen* vollständigen Einfluss auf die Gestaltung der Zahlenmauern, an denen sie arbeiten wollen (Größe, Art und Zahlbelegungen). Im Modus *Rechnen*, der aus didaktisch vorkonstruierten Pools gespeist wird (vgl. 1.2.2), *kann* die Mauerngröße und der Zahlenraum eingegrenzt, aber auch offen gehalten werden. Es wird nicht als problematisch, sondern als normal verstanden, hier auch einmal eine Mauer oder ein Set zu überspringen, falls es punktuell die momentanen Möglichkeiten übersteigen oder auch als zu ›trivial‹ erscheinen sollte. Eine permanente optimale Passung ist eine Illusion bzw. didaktische Fantasie, die der ZAHLENFORSCHER erst gar nicht zu bedienen versucht.

Natürlich können auch heute noch vorgegebene Rechenpäckchen sinnvoll sein, allerdings weniger solche, die nach dem Zufallsprinzip konstruiert wurden, sondern jene, deren Aufgabenabfolge einer unterlegten Struktur, einem Muster folgt – eben ›Päckchen mit Pfiff‹ oder ›schöne Päckchen‹ (vgl. Wittmann/Müller 2004). Als solche können auch die didaktisch konstruierten Pools für den Modus *Rechnen* verstanden werden.

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Die Zahlenmauern für den Modus *Rechnen* werden jeweils in didaktisch wohlüberlegten 4er-Sets angebotenen. Nach dem Ausrechnen werden in jedem Set gewisse Zahlenmuster (in den Grundreihenbelegungen, den Decksteinen, …) erkennbar, die sich für weiterführende Fragestellungen eignen (Woher kommt das? Was geschieht, wenn …?). Der betreffende Pool ist so umfangreich und zudem so konstruiert, dass Wiedererkennenseffekte oder vorschnelle Wiederholungen so gut wie ausgeschlossen sind und auch die Option eines externen Eingriffs durch Lehrpersonen (z.B. um selbst Mauern hinzuzufügen) entbehrlich ist (vgl. 1.2.2). Für Letzteres steht zudem der Modus *Selbst wählen* mit allen nur erdenklichen Freiheitsgraden zur Verfügung.

Entdeckendes Lernen bedarf einer professionellen Organisation der Lernprozesse

Dass Lernende sich aktiv mit einem ganzheitlich dargebotenen Lernstoff anhand offener Aufgabenstellungen auseinander setzen sollen, bedeutet weder, dass sie machen können, was sie wollen, noch dass diese Art des Unterrichtens für die Lehrpersonen leichter sei, weil ja doch die Kinder ›alles selbst entdecken‹ sollen! Im Gegenteil: Aktiv-entdeckendes Lernen bedarf einer sehr sorgfältigen und keineswegs trivialen *Organisation der Lernprozesse* (das meint mehr als bloßes Klassenmanagement oder Sozialformwechsel), wozu auf Seiten der Lehrperson auch eine voraus gehende sorgfältige und sachkundige *Durchdringung der mathematischen Hintergründe* der jeweiligen Lerninhalte gehört, weil diese ja nun vergleichsweise mehr fachliche Substanz beinhalten als bei unzusammenhängenden Rechenpäckchen, die es lediglich auszurechnen gilt (vgl. 5.2 sowie Krauthausen/Scherer 2006).

Lehrpersonen, die die Struktur der Muster verstehen und die dahinter stehenden mathematischen Konzepte oder Ideen für sich (als Hintergrundwissen) handhaben können, sind naturgemäß besser aufgestellt, um Kindern dabei zu helfen, ihr Gefühl und ihre Sensibilität für Muster zu entwickeln (vgl. Pinel 1990, 34).

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

In der vorliegenden Handreichung zum ZAHLENFORSCHER wird im Kap. 5 eine umfassende Aufbereitung der mathematischen Hintergründe des Aufgabenformats der Zahlenmauern sowie aller enthaltenen Forschungsaufträge vorgelegt. Dadurch können sich (v. a. auch fachfremd eingesetzte) Lehrerinnen und Lehrer informieren,

- um die Thematisierung von Zahlenmauern (on- oder offline) möglichst weitgehend *auszuschöpfen*,
- sinnvoll in andere mathematische Lernprozesse der Grundschule zu *integrieren* und
- *perspektivisch* auf den späteren Mathematikunterricht (Sekundarstufe) auszurichten.

Grundsätzlich jedoch ist es eine fundamentale Aufgabe der Lehrerbildung, angehenden Lehrpersonen eine *berufsbild-relevante fachinhaltliche* Professionalisierung zu ermöglichen – eine elementarmathematische Ausbildung vom höheren Standpunkt (vgl. Müller et al. 2004).

2.2 Produktives Üben und natürliche Differenzierung

Abgrenzung zum traditionellen Übungsverständnis

Dem im letzten Abschnitt skizzierten traditionellen Lernverständnis lässt sich ein entsprechendes Verständnis von der Rolle und der Gestaltung des Übens im Mathematikunterricht zuordnen (vgl. Winter 1984; Wittmann 1990/1992; Krauthausen/Scherer 2003 & 2006). Zur Abgrenzung von einem modernen Übungsverständnis, wie es u. a. auch im ZAHLENFORSCHER zugrunde gelegt wird, werden nachfolgend die zentralen Merkmale des traditionellen Übens kurz zusammengefasst.

Nach traditioneller Vorstellung, bei der im Mathematikunterricht *Mathematik als Fertigprodukt* von der Lehrperson an die Kinder verabreicht wird, dient das Üben als eine ›nachträgliche‹ Tätigkeit in erster Linie der Festigung zuvor angeeigneten Wissens: Beginnend mit einigen Musteraufgaben, die von der Lehrperson (ggf. unter Mitwirkung einzelner Kinder) vorexerziert werden, folgt alsdann die Bearbeitung gleichartiger Aufgaben im Klassenverband (Memorierung). Die Aufgaben enthalten bestimmte, meist isolierte Wissenselemente, die durch ausgedehnte Quantität der Aufgaben eingeübt, ›eingeschliffen‹ werden sollen (Fertigkeitstraining). Ziel ist der Aufbau zuverlässiger Reiz-Reaktions-Mechanismen zwischen Aufgabe und richtiger Lösung.

Verständlicherweise kann dies leicht langweilig werden. Daher hat man sich immer bemüht, die Kinder durch gewisse Motivationstricks – meist in Form sachfremder Verpackungen – zum Üben zu ›überlisten‹. Darüber sollte auch nicht hinwegtäuschen, dass dabei manchmal mit bedeutsam klingenden Vokabular gearbeitet wird: Die Kinder können (angeblich) differenziert, spielerisch, selbstbestimmt lernen. Man braucht dazu allerdings u. U. eine Unmenge verschiedener Arbeitsblätter für viele angenommene Lernstände, die man naturgemäß dennoch nie wirklich verlässlich ›treffen‹ kann. Die Aufgaben erlauben (angeblich) den Kindern eine ›Selbstkontrolle‹ – in Wirklichkeit handelt es sich um eine delegierte Fremdkontrolle: Die direkte Steuerung durch die Lehrperson wird lediglich ersetzt durch eine subtile Fernsteuerung durch das Material. Das entstehende Puzzlebild eines Rechen-Memorys hat gar nichts mit der Aufgabenanforderung zu tun. D.h. es besteht kein prinzipieller Unterschied darin, ob die *Lehrperson* dem Kind sagt, dass die Lösung richtig sei oder das Puzzlebild/die Stöpselkarte o. Ä. – was Selbstkontrolle *wirklich* bedeutet, das findet sich sehr schön bei Wilhelm Oehl:

»[Wir müssen] zwischen Fremdkontrolle und Selbstkontrolle unterscheiden. Sagt der Lehrer dem Schüler: ›Diese Aufgabe ist falsch‹, so handelt es sich einwandfrei um Fremdkontrolle. Aber auch in allen andern Fällen, in denen irgendein Hilfsmittel, etwa ein Ergebnisheft oder eine Prüfzahl […] dem Schüler sagt: ›Diese Aufgabe ist falsch‹, haben wir es mit Fremdkontrolle zu tun. Das richtige Ergebnis (im Ergebnisheft) oder die Prüfzahl sind von einem ›Fremden‹ gegeben worden. Handelt es sich um eine Aufgabe aus dem praktischen Leben oder irgendeine Aufgabe, die außerhalb des Rechenbuchs gestellt wurde, so entfallen solche Hilfen; der Schüler muß jetzt durch eigenes Nachdenken, durch eigenes Anwenden mathematischer Hilfsmittel die Entscheidung treffen: falsch oder richtig. Selbstkontrolle ist immer Individualkontrolle ohne jede fremde Hilfe. Die echte Selbstkontrolle muß auf jede Aufgabe in gleicher Weise anwendbar sein und nicht nur auf die Aufgaben des Rechenbuches. Diese begriffliche Klarstellung ist notwendig, weil sich in den zurückliegenden Jahren Kontrollmethoden in unsern Schulen unter dem anspruchsvollen Etikett ›Selbstkontrolle‹ (Prüfzahlen) eingebürgert haben, die in Wirklichkeit Fremdkontrollen sind. […] Die Selbstkontrolle verlangt von ihrem Begriff her eine erhöhte geistige Urteilskraft. Ich soll mathematische Beziehungen kontrollieren, d. h. doch, ich soll von einem übergeordneten Standpunkt aus, kraft meiner Einsicht in die Zusammenhänge, ein gültiges Urteil über richtig oder falsch abgeben. Jeder Kontrolle muß ein Denkakt zugrunde liegen, der die Kontrollmaßnahmen auslöst« (Oehl 1962, 33 f.).

Das Konzept des produktiven Übens

Legt man eine Vorstellung vom aktiv-entdeckenden Lernen von Mathematik zugrunde (Mathematiklernen als Prozess, als Tätigkeit, als Mathematik-Treiben), dann ist man zwingend auch auf ein anderes Übungskonzept angewiesen, das konsequent auch hier die aktive Tätigkeit der Lernenden in den Vordergrund stellt.

Produktives Üben ist nach Winter (1984, 6) in folgende vier Phasen gegliedert:

»1. Auseinandersetzung mit einer herausfordernden Situation, Exploration, Entwicklung einer Problemstellung;
2. Simulation und Rekonstruktion mit vorhandenem Material, dabei Entwicklung neuer Begriffsbildungen oder Verfahren und evt. Lösung des Problems;
3. Einbettung des neuen Inhalts in das vorhandene System; Ausgestaltung vielfältiger Beziehungen;
4. Bewertender Rückblick auf den neuen Inhalt und die Methode seiner Gewinnung; Thematisierung von Heurismen, bewusste Versuche des Transfers.«

Alle vier Phasen enthalten mehr oder weniger starke Anteile von Übung und Wiederholung, es wird, wie Winter sagt, »entdeckend geübt und übend entdeckt«.

»Üben ist damit im wesentlichen das Wiederaufnehmen eines (entdeckenden) Lernprozesses, das Nocheinmalnachbilden, Nocheinmalnachbauen von Lernsituationen. An der zunehmenden (und nicht schon gleich vermittelten) Schematisierung von Verfahren, an der Verflechtung von Wissen sowie an der geläufigeren Handhabung von Strategien werden die Schüler bewusst und aktiv beteiligt.« (ebd., 10)

Dass das Üben somit den gesamten Prozess des aktiv entdeckenden Lernens durchdringt, wurde auch im Modell des didaktischen Rechtecks gezeigt (s. Abb.; aus Wittmann 1992, 178), wo die Ebene der Lernaktivitäten (auf Seiten der Lernenden) und die Ebene der Lernorgansiation (auf Seiten der Lehrperson) gegenüber gestellt werden.

»Die Phase der Übung durchdringt dabei alle anderen Phasen in doppelter Weise: Einerseits enthalten Unterrichtseinheiten zur Einführung, Anwendung oder Erkundung immer auch Elemente des Übens. Zum anderen sind in den gesamten Lernprozess (kleinere oder größere) Unterrichtseinheiten zum Üben einzuflechten« (ebd.).

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Im ZAHLENFORSCHER gibt es keine unzusammenhängenden Aufgabenserien zum ›Einschleifen‹ von Rechenfertigkeiten. Die zweifellos auch bedeutsame Fertigkeitsschulung (z.B. in den Grundrechenarten) erfolgt hier als natürlicher Begleiteffekt der Bearbeitung von Aufgabenstellung mit weiter reichenden Zielen (vgl. Kap. 3). Damit wird Winters (1984) Forderung, entdeckend zu üben und übend zu entdecken, ausdrücklich nahe gelegt:

Der ZAHLENFORSCHER enthält (v. a. im Modus *Forschen*) herausfordernde Situationen, die auch zu neuen Problemstellungen Anlass geben, die außerhalb des Programms bearbeitet werden können. Die Bearbeitung der Forschungsaufträge bietet Anlässe zur Gewinnung neuer Verfahren und Darstellungsweisen (etwa zur Absicherung, dass *alle* Möglichkeiten einer Lösung gefunden wurden). Es können explizite Zusammenhänge zwischen den Forschungsaufträgen erkennbar und genutzt werden. Und nicht zuletzt wird der Bewusstheit über den eigenen Lernprozess, seine Einschätzung und rückblickende Bewertung (nicht i. S. von Noten, sondern i. S. metakognitiver Elemente des Lernens) immer wieder ausdrückliche Beachtung geschenkt (*Forscherheft*, Ordner *Ergebnisse*, *Lernbericht*).

Übungstypen

Um die Übungsangebote nicht einseitig zu konzipieren, wurde von Wittmann (1992, 178 ff.) eine Klassifizierung nach Übungstypen vorgeschlagen. Sie lassen sich zum einen (mit z. T. fließenden Übergängen) strukturieren …

- nach dem Grad der Strukturierung: unstrukturiert, schwach strukturiert, stark strukturiert
- nach der Nutzung konkreter Materialien: auf Material gestützt, formal/symbolisch

Strukturierungsgrad / Darstellungsform	unstrukturiertes	schwach strukturiertes Üben	strukturiertes
gestütztes Üben			
formales Üben			

Abb. nach Wittmann 1992, 179

Wie lässt sich in dieser Systematik der ZAHLENFORSCHER verorten?

- *Darstellungsform:* Wenn zum Berechnen von Mauern Werkzeuge wie Rechenrahmen, 100er-Feld (on-/offline-Versionen) oder andere Materialien zu Hilfe genommen werden, handelt es sich um gestütztes Üben. Was die Seite der Berechnungen betrifft, wird das jedoch auf das ganze Spektrum der Software hin gesehen eher seltener vorkommen; zumindest stellt es keinen erklärten Schwerpunkt im ZAHLENFORSCHER dar, gestützte Rechenübungen anzubieten, da der didaktische Ort der Software ein anderer ist.
  Gestützte Darstellungsformen können allerdings dort wieder zum Tragen kommen, wo es um das *Begründen* von Mustern geht (v. a. Modus *Forschen*): Denn auch wenn formale (algebraische) Verfahren den Lernenden hier noch nicht zur Verfügung stehen sollten, können sog. inhaltlich-anschauliche Beweise (vgl. Krauthausen 2001) eine analoge Funktion erfüllen. Plättchen- oder Punktmusterbeweise etwa bedienen sich geometrischer Darstellungen zur Aufhellung arithmetischer Zusammenhänge. Sie können bei einigen Forschungsaufträgen hilfreich sein! (vgl. 4.2.2 und 5.2.6)
- *Strukturierungsgrad:* Unstrukturiertes Üben erlaubt der Modus *Selbst wählen* mit seinen unbegrenzten Freiheitsgraden. Im Modus *Rechnen* sorgt bereits der didaktisch vorkonstruierte Pool für eine Hintergrundstrukturierung. Diese muss zwar noch nicht explizit Berücksichtigung finden (man kann die angebotenen Mauern auch einfach nur ausrechnen), durch die eingestreuten Impulse (»Fällt dir etwas auf?«) wird jedoch auf vorhandene Muster aufmerksam gemacht. Die gezielten Aufträge im Modus *Forschen* erfordern dann zwingend ein strukturiertes Vorgehen bzw. stellen die Muster und Strukturen ausdrücklich in den Mittelpunkt.

Neben dem Grad der Strukturierung kann man noch eine Unterscheidung nach der *Art und dem Zugang der Strukturierung* treffen (ebenfalls mit fließenden Übergängen, je nach Konstruktion oder Schwerpunktsetzung der Aufgaben):

- Problemstrukturierte Übungen: Die Gleichartigkeit der beim Üben zu berechnenden Aufgaben ist durch eine übergeordnete Frage- oder Problemstellung bedingt.
- Operativ strukturierte Übungen: Die Gleichartigkeit der Aufgaben ergibt sich aus der systematischen Variation der Aufgaben oder der Daten/Zahlen in den Aufgaben; die Ergebnisse stehen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang.
- Sachstrukturierte Übungen: Die Aufgaben werden aus einem Sachzusammenhang heraus strukturiert; die Ergebnisse vermehren zudem das (außermathematische) Sachwissen der Kinder.

Art der Struktur / Zugang zur Struktur	problem-strukturiertes Üben	operativ strukturiertes Üben	sach-strukturiertes Üben
reflektives Üben			
immanentes Üben			

Abb. nach Wittmann 1992, 180

Wie lässt sich in dieser Systematik der ZAHLENFORSCHER verorten?

- *Problemstrukturiertes Üben* findet v. a. im Modus *Forschen* statt, wo die übergeordneten Problemstellungen durch die jeweilige Forschungsfrage gegeben sind. Hier wird besonders der Forderung Winters (1984) entsprochen, entdeckend zu üben und übend zu entdecken. Des Weiteren wird bereits im Modus *Rechnen* durch die eingestreuten Impulse, ob etwas beim Berechnen auffällt, dazu ermuntert, auf Muster zu achten und damit den strukturellen Zusammenhang innerhalb eines Mauernsets zu problematisieren.
- *Operativ strukturiertes Üben*: Dieses ist durch die spezifische Gestaltung des Mauernpools im Modus *Rechnen* vorimplementiert. Die hier in dieser Hinsicht gewonnenen Erfahrungen (daher auch die o. g. Impulse im Modus *Rechnen*) können dann im Modus *Selbst wählen* bei der Konstruktion eigener Mauern umgesetzt und ausprobiert werden, was aber in der Hand der Lernenden liegt, wohingegen im Modus *Forschen* bei einzelnen Forschungsaufträgen ein operativ variierendes Vorgehen nicht selten hocheffizient bei der Lösungssuche sein kann.
- *Sachstrukturiertes Üben*: Diese Form des Übens deckt die Software (bewusst und naturgemäß) nicht ab, denn Zahlenmauern stellen ein *inner-mathematisches* Format dar und haben keine wirklich sinnvollen und kindgemäßen Entsprechungen in der Umwelt. (Auch in der Klasse aus realen Ziegeln oder Pappkartons aufgebaute und mit Zahlenkärtchen beklebte Zahlenmauern würden übrigens eine solche nicht darstellen!)

Und nicht zuletzt sind neben der Art der Strukturierung noch unterschiedliche *Zugangsweisen bzw. Arbeitsweisen mit der Struktur* der Übungen möglich:

- reflektives Üben: Der strukturelle Zusammenhang wird erst im Anschluss an einzelne, isolierte Übungen erkannt und reflektiert, also in der Rückschau herausgearbeitet. Diese Zugangsweise impliziert zwei Phasen: *a)* Berechnungen anstellen, *b)* Reflektieren über erkannte Muster.
- immanentes Üben: Der strukturelle Zusammenhang der Übung wird von Beginn an in den Blick genommen und gleichsam als Leitfaden benutzt, z. B. als übergeordnete Frage-/ Problemstellung. Die einzelnen Berechnungen der Übungsaufgaben erfolgen also von Anfang an vor dem Hintergrund bzw. mit Blick auf ein übergeordnetes Ziel.

Wie lässt sich in dieser Systematik der ZAHLENFORSCHER verorten?

- *reflektives Üben* erfolgt v. a. im Modus *Rechnen*, wo zuerst jeweils die Zahlenmauern-4er-Sets ausgerechnet werden müssen, bevor ein Muster erkennbar wird und ggf. reflektiert werden kann. Ob und inwieweit auch im Modus *Selbst wählen* und auch *Forschen* reflektives Üben stattfinden kann, hängt von der Nutzungsweise ab, für die hier ja weit reichende Freiheitsgrade zur Verfügung stehen.
- *immanentes Üben* ist der Schwerpunkt im Modus *Forschen*, da durch die Forschungsaufträge eine übergeordnete Problemstellung vorgegeben ist, zu deren Lösung die Berechnungen von der ersten Zahlenmauer an dienlich sein sollen und sie damit von Anfang an in den Blick nehmen müssen.

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Der ZAHLENFORSCHER berücksichtigt durch seine Programm-Modi und deren unterschiedliche Schwerpunktsetzungen ein breites Spektrum von Übungstypen (i. S. Wittmanns). Anknüpfungsoptionen zum gestützten Üben sind vorhanden, ebenso wie auch Möglichkeiten des unstrukturierten Übens im Modus *Selbst wählen* durch die hohen Freiheitsgrade. Der Schwerpunkt des ZAHLENFORSCHERs liegt auf dem (problem- und operativ-)strukturierten Üben, sowohl in reflektiver wie immanenter Form.

Natürliche Differenzierung

Das Problem der Differenzierung ist alles andere als neu, angesichts zunehmend heterogener Lerngruppen in den Schulen ist ihm aber in den vergangenen Jahren eine stetig wachsende Bedeutung zugekommen. Zahlreiche Vorschläge wurden unterbreitet unter der konsensuellen Einsicht, dass ein effektiver Mathematikunterricht – wie jeder andere Unterricht auch – grundsätzlich nur differenziert ablaufen kann. Unterschiedliche Ansichten scheinen allerdings darüber zu bestehen, wie eine solche Differenzierung konkret aussehen sollte.

Ein Problem, das ebenfalls seit Jahren besteht und auch heute noch durch entsprechende Angebote genährt wird, besteht in der Hoffnung, die erforderliche Individualisierung vorrangig *organisatorisch* in den Griff zu bekommen – was sicherlich eine Problemverkürzung darstellt. Die Einrichtung von ›Lerntheken‹, die Bereitstellung einer Fülle an Materialien, Karteikarten oder Arbeitsblättern bringt nicht den gewünschten Erfolg, sondern generiert oft genug nur eine Oberfläche, hinter der die mathematische Substanz zunehmend verschwindet. Wenn ›offener Unterricht‹ oder ›Kindorientierung‹ zu bloßen Schlagwörtern degenerieren, so Valtin (1996, 185), dann können sich gefährliche Konsequenzen einstellen:

Zum einen der Verzicht auf strukturierte und/oder herausfordernde Lernangebote zugunsten eines ›Selbstbedienungsladens‹ (ebd.). Und zum anderen sind die ›didaktischen Feuerwerke‹ mitunter so aufwändig, dass sie nicht den Alltag darstellen (können), sondern allenfalls etwas Besonderes. Aber: »Es geht um das System, nicht um die Highlights. Es gibt keine Tricks, sondern nur einen Weg: Differenzieren ohne zu trennen« (Meier 2002, 4). Wie aber kann das gelingen? Brügelmann (2001) fordert eine ›Differenzierung nach Inhalten‹ und stellt sogleich die kritische Frage: »Aber wer kann die leisten – bei 25 bis 30 Kindern? [...] Kein Wunder, dass selbst konventionelle Formen der Differenzierung im Schulalltag eher selten praktiziert werden« (Brügelmann 2001, 52). Die Mathematikdidaktik hätte dazu ein Angebot: Das ›Geheimnis‹ liegt in einer bestimmten Qualität der Lernangebote.

Sie müssen offen sein in dem Sinne, dass sie unterschiedliche Zugangsweisen, Bearbeitungswege und Anspruchsniveaus ermöglichen. Und *wegen* der großen Heterogenität der Lerngruppen muss man, so auch die Erfahrungen von Hengartner (1997), ganzheitlicher und grossschrittiger planen: »Man braucht komplexere Aufgaben, die allen Zugang bieten, die sich aber auf unterschiedlichen Niveaus lösen lassen« (ebd., 3). Angenehmer ›Nebeneffekt‹: »Wer Kindern eigene Entdeckungen zutraut, wer Spielraum für eigene Lösungsstrategien gewährt, wird neugierig auf die Denk- und Lernwege der Kinder und will sie erfassen und verstehen« (ebd.).

Die damit verbundene Empfehlung haben Wittmann et al. (1994 bzw. 1997) *natürliche* Differenzierung genannt und wie folgt begrifflich gefasst, von traditionellen Formen abgegrenzt und begründet:

> *»Bei der üblichen [...] Differenzierung wird eine Lerngruppe [...] in Teilgruppen aufgespalten, die unterschiedlich schwere Aufgaben erhalten und/oder sie auf unterschiedlichen Niveaus und mit unterschiedlichen Mitteln lösen. Dies ist eine Differenzierung vom Lehrer aus, da er den Kindern die Aufgaben und die Bearbeitungsform zuweist. Im Sinne des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens bietet sich darüber hinaus eine Differenzierung vom Kinde aus (natürliche Differenzierung) an: Die gesamte Lerngruppe erhält ein ganzheitliches Themenangebot, das naturgemäß Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsniveaus umfaßt. Die einzelnen Kinder wirken nach ihren Fähigkeiten bei der Lösung mit. Gerade für schulschwache Kinder ist dies außeror-*

dentlich wichtig: Dadurch, daß sie die Freiheit haben, über die benutzten Hilfsmittel, die Rechenwege und die Form der Lösung selbst zu entscheiden, können sie ihre Lernvoraussetzungen selbst optimal einbringen und werden so am besten vorankommen« (Wittmann et al. 1994, 12).

»Die Freiheit in der Wahl der Lösungswege und Anschauungsmittel, manchmal auch der Aufgaben selbst sowie im Rahmen gewisser sozialer Konventionen auch die Freiheit in der mündlichen oder schriftlichen Form der Lösungen liegt sowohl in der Natur des aktiv-entdeckenden Lernens als auch in der Natur der Mathematik« (ebd., 4).

Insgesamt ist die natürliche Differenzierung ein noch stark unterschätzter (oder unbekannter?) Weg, der noch zu wenig oder noch nicht konsequent genug in der (Grund-)Schule genutzt wird, d.h. hier liegen durchaus noch nicht ausgeschöpfte Möglichkeiten. Sie macht, im Sinne Freudenthals (1974), aus der ›Not‹ der Heterogenität eine Tugend, indem »die Schüler nicht neben-, sondern miteinander am gleichen Gegenstand auf verschiedenen Stufen tätig sind« (ebd., 166). Und zwar »jeder auf der ihm gemäßen Stufe [...], und diese Zusammenarbeit soll es sowohl denen auf niedrigerer Stufe wie denen auf höherer Stufe ermöglichen, ihre Stufen zu erhöhen, denen auf niedrigerer Stufe, weil sie sich auf die höhere Stufe orientieren können, denen auf höherer Stufe, weil die Sicht auf die niedrigere Stufe ihnen neue Einsichten verschafft« (ebd., 167). Freudenthal nennt das, was sich dann zwischen den Lernenden ereignet, ›didaktische Beziehungen‹: »Schüler lernen es, didaktisch zu führen und geführt zu werden – nullte Stufe der Didaktik, auf der sogar manche Lehrer ihr Leben lang bleiben. Eine höhere Stufe ist die, wo man über ausgeübte Didaktik (die eigene und die anderer) reflektiert – man sollte das doch wenigstens zukünftigen Lehrern beibringen« (ebd., 172).

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Der ZAHLENFORSCHER ermöglicht aufgrund seiner Binnenstruktur wie durch das Aufgabenformat der Zahlenmauern in hohem Maße eine natürliche Differenzierung. Alle mit diesem Konzept verbundenen Postulate (s. o.) lassen sich – nicht nur, aber v. a. bei einer adäquaten Integration der Software in einen wünschenswerten Unterrichtskontext – beispielhaft realisieren.

2.3 Substanzielle Lernumgebungen (SLU)

Im 2. Band des Handbuchs produktiver Rechenübungen grenzt Wittmann (1992) den traditionell gefärbten Begriff der ›Unterrichtseinheit‹ von einem weiter führenden Verständnis sog. substanzieller Unterrichtseinheiten ab: Kurz gesagt meint erstere die Behandlung eines bestimmtem Themas über eine oder mehrere Unterrichtsstunden, wobei die methodische, formal-didaktische Aufbereitung dieses *Lehrvorhabens* durch die Lehrperson im Mittelpunkt steht. Bei substanziellen Unterrichtseinheiten steht demgegenüber die *inhaltliche* Seite, d.h. auch ganz wesentlich die im Unterrichtsgegenstand wirksame *Eigendynamik der Sache*, im Vordergrund. Sie lassen sich aus möglichst gehaltvollen realen oder innermathematischen Problemstellungen heraus entwickeln.

Damit entsprechen sie nicht nur den o. g. Postulaten der Anwendungs- und Strukturorientierung, sondern auch der im Rahmen der natürlichen Differenzierung als unerlässlich angesehenen Bedeutung inhaltlicher Aspekte vor den organisatorischen. Da der Begriff der Unterrichtseinheit einschlägig belegt ist und das, was Wittmann meint, eben unabhängig von Unterrichtsstunden ist (erst Recht eines 45-Minuten-Zuschnitts) und eine Organisation von offenen, inhaltlich ganzheitlich und gehaltvollen ›Umgebungen‹ bedeutet, die eine Vielfalt unterschiedlicher Aktivitäten erlauben, wird seit längerem (u. a. Krauthausen 1998) der Begriff *substanzielle Lernumgebung* (SLU) bevorzugt (vgl. auch Wittmann 1998/2001/2004). Demnach sind substanzielle Lernumgebungen (in der angelsächsischen Literatur *substantial learning environments*) durch folgende konstituierende Merkmale charakterisiert:

1. *Sie repräsentieren zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des mathematischen Lernens auf einer bestimmten Stufe (in unserem Fall also etwa der Grundschule) und sind daher mit anderen substanziellen Lernumgebungen vielfältig verknüpfbar.*

   All das, was man also über wünschenswertes und effektives Mathematiklernen heute weiß, was damit erreicht werden soll und welche Grundprinzipien dabei wirksam sein sollen (z.B. didaktische Prinzipien; vgl. Krauthausen/Scherer 2003, 122 f.) – all dies muss sich in einer SLU widerspiegeln.

2. *Sie sind verbunden mit fundamentalen Ideen und Verfahren der Mathematik (auch über die Stufe der Grundschule hinaus!) und beinhalten daher ein reiches Potenzial für mathematische Aktivitäten.*

   Es muss sich also um eine *mathematisch reichhaltige* Umgebung handeln. Die Orientierung an fundamentalen Ideen des Faches (den Lehrpersonen als Hintergrundwissen vertraut) ist hilfreich, um sich vor dem Hintergrund des Zeitdeputats eines Schuljahres nicht in Einzelheiten und Randthemen zu verlieren, sondern sich auf Ideen der Mathematik zu konzentrieren, die von Klasse 1 an über die Sekundarstufe bis in das Fachstudium und die Fachwissenschaft durchgängig bedeutsam sind. Hierbei wird deutlich, wie viel Zahlentheorie beispielsweise bereits im Grundschulunterricht relevant und vorhanden ist –

und auch kindgemäß (nicht kindertümelnd, sondern intellektuell redlich; vgl. Bruner 1970) erarbeitet werden kann. Je substanzieller die zu verhandelnde Sache ist, desto mehr Raum und desto vielfältigere Ansatzpunkte und Optionen gibt es, Aktivitäten in Gang zu setzen und aufrecht zu erhalten, die dem Lernen im genannten Sinne und der Einsicht förderlich sind. Und umso weniger ist man angewiesen auf sachfremde Verpackungen, die zwar eine Lerngruppe äußerlich ›lebendig‹ erscheinen lassen können, häufig aber eben durch vordergründigen Aktionismus oder vorrangig organisatorisches Klassenmanagement.

3. *Sie sind didaktisch flexibel und können daher leicht an die speziellen Gegebenheiten einer konkreten Lerngruppe angepasst werden.*

   Hat die Lehrperson eine SLU für sich selbst durchdrungen, was v. a. auch das Verständnis der dahinterstehenden mathematischen Ideen und Begriffe sowie eine ausgiebige (Selbst-) Erfahrung mit den möglichen Frage- oder Problemstellungen meint, dann kann eine solche Lernumgebung sehr flexibel und v. a. unaufwändig an die spezifischen Rahmenbedingungen einer konkreten Lerngruppe angepasst werden. Das betrifft sowohl die Anforderungen an das spontane Reagieren, die sich der Lehrperson während der Aktivitätsphasen der Kinder stellen können, wie auch die Anpassung der gleichen Lernumgebung an andere Jahrgangsstufen. U. a. diese Option ist mitverantwortlich für die enorme Potenz, die den Konzepten der SLU und der natürlicher Differenzierung innewohnt: Denn was kann man sich angesichts des Dauerthemas Differenzierung Schöneres vorstellen als ein Werkzeug zur Veränderung von Unterricht, das den Aufwand in *alltagstauglichen* Grenzen hält und dabei zugleich die Substanz der Lernprozesse maßgeblich erhöht?!

4. *Sie integrieren mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in ganzheitlicher Weise.*

   Diese Bedingung erinnert daran, dass Mathematikunterricht oder das Mathematik-Treiben keineswegs nur Kognition, einseitige Rationalität, linke Gehirnhälfte u. Ä. bedeutet, sondern gleichwohl psychologische und pädagogische Maximen sowie eine affektive/emotionale Komponente in natürlicher Weise integriert. In der mathematischen Fachliteratur kommen Begriffe wie Ästhetik oder Schönheit (von Beweisen oder zahlentheoretischen Mustern etwa) durchaus nicht selten vor. Das folgende Zitat des Mathematiker Godfrey H. Hardy (1877-1947), dem ›Vater‹ der modernen Zahlentheorie, ist in diesem Zusammenhang schon mehr als sprichwörtlich: »Die Muster des Mathematikers müssen wie jene eines Malers oder Dichters *schön* sein, sie müssen wie die Farben oder die wohlgesetzten Worte auf harmonische Weise zusammenpassen. Schönheit ist das erste Gütekriterium: Für hässliche Mathematik gibt es auf Dauer keinen Platz auf der Welt« (A Mathematicians Apology 1941; Übers. u. Hervorh. GKr). Und neben der Schönheit gehört auch das ›Spiel mit Zahlen‹ sowohl zur Fachwissenschaft wie zur natürlichen Mathematik von Kindern. »Zum mathematischen Tätigsein gehören sowohl das korrekte Schlußfol-

> gern aus in sich widerspruchsfreien Definitionen und Annahmen wie auch Intuition und Konstruktion (als treibende Kraft), ebenso ›das Spielen mit Zahlen und Formen‹ und auf das praktische Anwenden gerichtetes Vorgehen« (Courant/Robbins 1992, zit. in Steinweg 2001).

Es ist Aufgabe der mathematikdidaktischen Forschung, solche SLU zu entwickeln. Die aktuelle Fachliteratur bietet inzwischen eine Vielzahl von Vorschlägen und Erfahrungsberichten zu allen Inhalten der Grundschulmathematik. Ebenso ist auch ihre tatsächliche Machbarkeit und Alltagstauglichkeit dokumentiert, d. h. auch die Ausdauer, Motivation und Effektivität, mit der sich Grundschulkinder auf solche Lernumgebungen einlassen.

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Der ZAHLENFORSCHER regt dazu an, die den Zahlenmauern innewohnende Substanz stärker als bisher gewohnt auszuschöpfen und sie nicht lediglich als Aufgabenträger für unzusammenhängende Rechenaufgaben zu benutzen. Der potenzielle Einwand, dies sei für die Kinder (und/oder die Lehrpersonen) ungewohnt (und daher ›zu schwer‹), liefert gleichzeitig die Legitimation des Tuns: Gerade *dann* macht es Sinn, entsprechende Angebote zu unterbreiten, damit es lernbar wird. *»Nicht weil es schwer ist, fangen wir es nicht an, sondern weil wir es nicht anfangen, ist es schwer«* (Seneca).

2.4 Metakognition

Der Reflexion über die eigenen Lernprozesse wird vermutlich im Mathematikunterricht der Grundschule noch zu wenig Beachtung in dem Sinne geschenkt, dass diese Fähigkeit selbst ausdrücklich zum Unterrichtsgegenstand erhoben wird. Denkbare Ursachen können in der fragwürdigen Vorstellung gesehen werden, dass »Metakognition durch tagtägliche Lernerfahrungen gewissermaßen von selbst erworben wird. Ebenso scheint eine Überschätzung der als vorhanden vermuteten metakognitiven Fähigkeiten oder eine Unterschätzung der Lernenden in der Nutzung von Metakognition vorzuliegen« (Sjuts 1999, 497).

So wird allein schon der so bedeutenden *Rückschau* auf den Lernprozess (nur eine Facette von Metakognition) selten ausdrückliche Beachtung geschenkt. »Von der besten Wirkung [etwa guter Ideen; GKr] geht etwas verloren, wenn der Schüler versäumt, die fertige Lösung *noch einmal* zu überprüfen und *zu durchdenken*«, bedauert Polya (1995, 19), und etwas später:

> *»Selbst recht gute Schüler schließen ihre Hefte, wenn sie die Aufgabe gelöst und den Beweis sauber niedergeschrieben haben, und warten auf etwas Neues. Wenn sie so verfahren, lassen sie eine wichtige und lehrreiche Phase der Arbeit aus. Durch Rückschau auf die vollendete Lösung, durch nochmaliges Erwägen und Überprüfen des Re-*

sultats und des Weges, der dazu führte, könnten sie ihr Wissen festigen und ihre Fähigkeiten, Aufgaben zu lösen, entwickeln« (Polya 1995, 28).

Aber zur Metakognition gehört noch weit mehr: Sie umfasst nach Sjuts (2003) die Fähigkeit des Menschen, über sein eigenes Wissen, über eigenes Handeln und Denken und auch über eigene Lernprozesse reflektieren zu können. Es geht also um die Kenntnis der Lernenden über ihr eigenes ›intellektuelles Funktionieren‹ sowie »die Fähigkeit, auf autonome Art die nötigen verschiedenen metakognitiven Funktionen verfügbar zu haben, um Probleme zu lösen« (Martin/Doudin 1996, 45). Dazu gehören etwa Tätigkeiten des Planens, der Vorausschau, der Hierarchisierung von Informationen, der Selbstüberwachung i. S. des sich selbst über die Schulter Blickens (Monitoring), der Selbsteinschätzung und Introspektion sowie des Prüfens der eigenen Vorgehensweisen und (Zwischen-)Ergebnisse.

Metakognition wird als Schlüsselqualifikation für Lernen verstanden. Zahlreiche Studien haben gezeigt, dass schulischer Erfolg Hand in Hand geht mit hoher metakognitiver Kompetenz (Martin/Doudin 1996). In ihrem Forschungsprojekt *Eigenständige Lerner: Förderung des eigenständigen Lernens, Denkens und Problemlösens von Schülern durch die Erleichterung der Selbststeuerung, Selbstbeobachtung und Reflexion der eigenen Lernerfahrungen* haben Beck et al. (1992) gezeigt, wie eigenständige Lerner über Strategien verfügen, eigene Erfahrungen zu nutzen und daraus zu lernen. Sie können ihre eigenen Stärken und Schwächen einschätzen, sie können sich selbst beim Ausführen einer Handlung steuern, beobachten und kontrollieren, sie denken über ihr eigenes Verhalten nach und reflektieren über Mittel-Zweck-Zusammenhänge (ebd., 11 f.). Und dies gilt bereits für Lernende in der Grundschule:

»Die metakognitiven Verfahren des gegenseitigen Vormachens (Fremdbeobachtung an Ausführungsmodellen), des Beobachtens und Dokumentierens (Selbstbeobachtung und Arbeitsheft), des gemeinsamen Analysierens und Reflektierens (Lernpartnerschaft, Arbeitsrückschau) und des gemeinsamen Besprechens von Lernprozessen haben sich als wirksame Instrumente für die Förderung eigenständiger Lerner erwiesen, und zwar schon für Schüler der Primarschule (…). Primarschüler und Schülerinnen und Schüler aus dem mittleren Leistungsbereich wiesen die stärksten Zunehmen an metakognitiver Bewusstheit auf« (Beck et al. 1992; 81 u. 83).

Wichtig für eine gezielte unterrichtliche Förderung von Metakognition, wenn sie denn auch tatsächlich die Effektivität von Denken und Lernen erhöhen soll, sind aber zwei Bedingungen, auf die Sjuts (2003) verweist: Erstens entwickelt sie sich nicht »unverbindlich«, quasi von selbst, schon alleine durch das Ausbleiben von Fremdsteuerung. Und zweitens gibt es keine inhaltsfreie Entwicklung von Metakognition. Was folgt daraus?

Erstens, dass die Lehrperson bewusst und gezielt Lernanlässe organisiert und verfügbar macht, also metakognitive Aktivitäten konkret anregt und anwendet. Dazu bedarf es entsprechender Aufgabenstellungen, die das auch in natürlicher und sinnvoller Weise ermöglichen, indem sie Eigenproduktionen der Lernenden evozieren und erfordern (vgl. Sjuts 1999;

Kaune 1999). Dadurch wird auch der geforderten Inhaltlichkeit entsprochen, denn es gibt ein *Etwas*, über das man schreiben, reden und reflektieren kann (und nicht nur leere Methode, ›Stricken ohne Wolle‹).

Und zweitens bedarf es gewisser Abmachungen, eines »didaktisch-sozialen Vertrags« (Sjuts 2003, 18), wie das Arbeiten im Mathematikunterricht sowie das Reflektieren darüber aussieht bzw. auch, welches Instrumentarium dafür hilfreich ist und eingesetzt werden soll.

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Die Forschungsaufträge im ZAHLENFORSCHER stellen Aufgabenkontexte bereit, die Eigenproduktionen evozieren (Selter 1994). Durch entsprechende Instrumente bzw. die damit verbundenen Abmachungen – Einsatz von *Forscherheft,* Ordner *Ergebnisse, Lernbericht* – können Voraussetzungen geschaffen werden, um metakognitive Aktivitäten bzw. Kompetenzen im Unterricht (also nicht schon alleine durch das Benutzen der Software!) zu fördern. Durch Verschriftlichungen (*Forscherheft*, Ordner *Ergebnisse*) und das auf dieser Basis nahe liegende Sprechen über Prozesse und Ergebnisse wird das *Wissen über das eigene Wissen und Denken* bewusst gemacht und damit die Chance zur bewussten Rückschau, Analyse und Reflexion eröffnet.

2.5 Zum Umgang mit Fehlern

Lernende sollen, so die zeitgemäße Forderung von Bildungsplänen und Fachdidaktik, zunehmend Verantwortung für ihren eigenen Lernprozess übernehmen lernen – beginnend bereits in der 1. Klasse. Das impliziert auch, mit Fehlern a) selbstständig und b) produktiv umgehen zu lernen. Deshalb ist es förmlich kontraproduktiv, wenn eine Software, wie leider immer noch überwiegend üblich, z.B. nach drei Fehlversuchen die korrekte Lösung vorgibt.

›Aus Fehlern lernen‹ ist weitaus effektiver und nachhaltiger, wenn es durch die eigene Bearbeitung und Einsicht (auch in die Fehlerursachen) geschieht. Fehler nicht primär als etwas ›Auszumerzendes‹ oder am besten gar im Vorfeld schon zu Vermeidendes zu stigmatisieren, wird dem tatsächlichen und natürlichen Ablauf von Forschungs- wie Lernprozessen nicht gerecht. Fehler sind hier nicht nur natürliche Begleiterscheinungen, sondern oft sogar Impulsgeber für (strukturell angereichertes) Nachdenken und Lernergebnisse auf höheren Niveaus. »Negative Ergebnisse [...] bedeuten oftmals einen gewaltigen Fortschritt in der Mathematik oder in den Naturwissenschaften« (Gell-Mann 1996, 81). Nicht Fehlervermeidung um jeden Preis heißt das Postulat, sondern Fähigkeit zum produktiven Umgang mit Fehlern.

Natürlich kommt es dabei auch auf den *didaktischen Ort* an: Es gibt Situationen, da sollte man sich tunlichst nicht (mehr) verrechnen, aber es gibt ebenso Kontexte, da ist ein Fehler erst einmal kein wirklich brisantes Problem.

Und des Weiteren ist der Umgang mit Fehlern abhängig von der *Fehlerart*: Es sollte sorgfältig unterschieden werden, ob es sich um Rechenfehler, Denkfehler oder Notationsfehler handelt, denn je nachdem sind – erst recht in Kombination mit dem didaktischen Ort – ganz unterschiedliche Reaktionsweisen opportun!

Selbstkontrolle statt Fremdkontrolle

Die Lernenden sollen zunehmend in die Lage versetzt werden, unabhängig von *externen* Kontrollen zu werden und stattdessen Methoden kennen lernen, wie sie sich *selbst* Gewissheit über die Richtigkeit eines Vorgehens verschaffen bzw. im Fehlerfall Ursachen aufdecken und Abhilfe finden können. Auch die Lehrpersonen sind im Unterricht bemüht, Hilfen zur Selbsthilfe zu geben und nicht als ›letzte Instanz‹ über Richtig oder Falsch zu fungieren und damit die Lernenden abhängig von dieser externen Autorität zu halten. Es ist prinzipiell kein Unterschied, ob es sich dabei um die Lehrperson oder eine Software handelt, die als solche fungiert. Auch im letzteren Fall handelt es sich um eine Fremdkontrolle – nur eben an das Material (hier: Programm) delegiert (vgl. das entlarvend klare Zitat aus Oehl 1962 auf S. 46 dieser Handreichung).

Alternativ sollten die Kinder im Unterricht bereits von Anfang an angeleitet werden, Sensibilität für Fehler als natürliche Begleiterscheinung von Lernprozessen zu entwickeln und sie nicht als ›persönlichen Makel‹ zu verstehen. Ebenso wichtig ist es, ein selbstverständliches Bedürfnis nach Fehlerprüfung und Verantwortung für das eigene Vorgehen zu entwickeln. Auch dies kann in einfachen Formen bereits ab Klasse 1 beginnen, wobei die Lehrpersonen hier zunächst noch in Stellvertreterfunktion wünschenswertes Modellverhalten realisieren werden (und als solches bewusst machen sollten!).

Methoden zum Umgang mit Fehlern

Insbesondere gehört dazu auch eine Unterstützung beim Erlernen konkreter Maßnahmen zum Umgang mit Fehlern:

- Es gibt z. B. *innermathematische* Prüfverfahren in Reichweite von Grundschulkindern: Jede Aufgabe der Grundrechenarten kann etwa durch ihre Umkehraufgabe (Reversibilität) geprüft werden, manche durch ihre Tauschaufgabe (Kommutativgesetz). Meist sind auch Anbindungen an ›verwandte‹ Aufgaben möglich (vgl. Grundaufgaben/Grundstrategien bei Radatz et al. 1996, 84).
- Des Weiteren lassen sich andere *Repräsentationsebenen* zur Kontrolle nutzen: Additions- und Subtraktionsaufgaben lassen sich (ggf. über Analogieaufgaben) mit Hilfe konkreter Materialien prüfen – sei es mit dem Rechenrahmen oder dem Punktfeld, wie sie auch als virtuelle Version im ZAHLENFORSCHER enthalten sind, aber gewiss auch in physischer Form im Klassenzimmer. Natürlich sind auch andere konkrete Arbeits- oder Anschau-

ungsmittel zur enaktiven oder auch ikonischen Vergewisserung hilfreich (Skizzen). Dies wird sich letztlich nach den in der jeweiligen Klasse gegebenen Gewohnheiten richten.

Gemäß dem Prinzip der minimalen Hilfen sind *nach* einem solchen Versuch gänzlich selbstständiger Richtigkeitsprüfung oder Fehlerbehandlung weitere Möglichkeiten sinnvoll, die den Lernenden aber nicht zu früh (wenn auch gut gemeint) aufgedrängt werden sollten.

- Führen die bisher genannten Methoden nicht weiter, so kann man sich (dann!) an *Mitlernende* mit der Bitte um Hilfe wenden. Dabei sollte es möglichst zuvor Gegenstand eines bewussten Lernprozesses gewesen sein, wie denn (auch für Kinder) wünschenswerte Hilfeleistung aussehen sollte (nämlich nicht als Abnehmen der Verantwortung durch ›Vorsagen‹; s. o.). Dem in der Grundschule üblichen ›Helfersystem‹ täte es von daher manchmal gut, daraufhin überprüft zu werden, sind damit doch erhebliche Kompetenzen auf Seiten des Hilfe-Gebenden nötig, über die Kinder nicht schon automatisch verfügen (können).
- Als letzte Stufe bei der Richtigkeitsprüfung bzw. Fehlerbehandlung wäre dann die Beratung durch die *Lehrperson* zu suchen, für die natürlich die bisher genannten Prinzipien gleichermaßen und insbesondere gelten.

Zu beachten ist des Weiteren der *didaktische Ort* der Richtigkeitsprüfung und der Fehlerbehandlung, wodurch sich unterschiedliche Praktiken rechtfertigen lassen (s. u.).

> ***Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:***
> Die Fehlerbehandlung im ZAHLENFORSCHER ist sehr differenziert angelegt und richtet sich nach der jeweiligen Situation (dem didaktischen Ort) bzw. dem Modus, in dem ein Fehler auftaucht. In keinem Falle jedoch wird die richtige Lösung vom Programm vorgegeben – auch nicht nach einer gewissen Anzahl von Fehlversuchen.

Fehlerbehandlung im Modus ›Regel‹

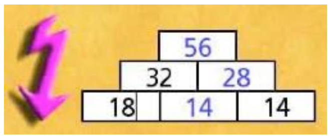
Hier steht die Einsicht in die Regel bzw. die Aufbaustruktur von Zahlenmauern klar im Vordergrund. Das Rechnen ist hier (unter Übungsaspekten) völlig sekundär. Aus diesem Grund wird wie folgt verfahren:

Sämtliche Werte des ersten (softwaregesteuerten) Beispiels werden programmseitig vorgegeben, mithin sind Fehler hier ausgeschlossen. In den weiteren Beispielen des Typs *A* bis *B* sind benutzerseitige Eingaben erforderlich und damit theoretisch Fehleingaben möglich. Diese werden aus o. g. Gründen aber nicht dramatisiert, ihre Annahme wird vom Programm lediglich verweigert und eine Neueingabe gefordert. Denn hier ist *nicht* der didaktische Ort, Belehrungsstrategien zu realisieren oder Fehlermuster oder -ursachen zu thematisieren!

Fehlerbehandlung im Modus ›Rechnen‹

Dieser Modus fokussiert insbesondere auf das gemischte Üben der Addition und Subtraktion. Rechnerische Richtigkeit ist nicht nur von daher hier bedeutsam. Hinzu kommt, dass das Erkennen der in den Zahlenmauern-4er-Sets enthaltenen Muster und Regelhaftigkeiten auf korrekte Berechnungen angewiesen ist. Umgekehrt kann natürlich auch ein ›gestörtes‹ Muster Anlass zu einer rechnerischen Überprüfung sein (wenn es nicht als gezielt eingebaute ›Störgröße‹ identifizierbar ist). Die Fehlerbehandlung geschieht daher in diesem Modus unter folgenden Prämissen:

- Um das *eigene* Korrekturbedürfnis der BenutzerInnen zu fördern, erfolgt *keine automatische* Kontrolle. Ein weiterer Grund ist die Tatsache, dass das Programm nicht selbstständig entscheiden kann, wann eine Eingabe abgeschlossen ist und gelten soll. Daher kann jederzeit benutzerseitig eine (externe) Kontrolle (im Idealfall nach o. g. Verfahren der echten Selbstkontrolle) über die Kontroll-Taste (vgl. 1.1) angefordert werden, sei es nach jeder berechneten Mauer oder nach mehreren.
- Im Falle korrekter Mauern erfolgt eine optische Bestätigung der eingegebenen Werte. Im Falle eines Rechenfehlers erscheint neben einer betroffenen Mauer ein magentafarbiger Pfeil. (Bei korrekter Nachbesserung und erneuter Prüfung verschwindet er automatisch.) Er signalisiert: »In dieser Mauer stimmt noch etwas nicht!«



- Es wird *bewusst nicht die genaue Fehlerstelle* lokalisiert, da diese selbstständig gefunden werden soll. Einige Lehrpersonen aus der Erprobung haben dies als »schwierig für die Kinder« bezeichnet und sich eine genaue Kennzeichnung der Fehlerstelle gewünscht. In der Tat wäre das für die Kinder ›einfacher‹. Aus didaktischer Verantwortung heraus geht es aber gerade nicht darum, den Lernenden tunlichst alle Steine aus dem Weg zu räumen. Der ZAHLENFORSCHER verfährt also in dieser Hinsicht *bewusst* anders, weil es hier um zentrale Erfahrungswerte geht, die man den Kindern nicht durch voreiliges Vereinfachen vorenthalten sollte. Man bedenke auch, was Winter (1983) in diesem Zusammenhang fordert:

  > *»[P]rimär muß der Unterricht darauf gerichtet sein, Denken zu ermöglichen und nicht (ohne weiteres), es zu erleichtern«* (ebd., 71).

- Auch bei wiederholten Falscheingaben wird niemals die Lösung vom Programm vorgegeben. Auch hier gilt das Prinzip: Die NutzerInnen sollen selbstständig nach sinnvollen, effektiven und adäquaten Strategien Ausschau halten, mit denen sie das rechnerische Problem beheben können. *Jede* der o. g. Alternativen ist didaktisch wertvoller als die Vorgabe von Lösungen durch das Programm.

Fehlerbehandlung im Modus ›Selbst wählen‹

In diesem Modus gilt zunächst einmal, solange es um das *Online*-Bearbeiten der erstellten Arbeitsblätter geht, das Gleiche wie im Modus *Rechnen*. Ein Spezifikum kann sich dadurch ergeben, dass hier nicht wie im Modus *Rechnen* vorgegebene Mauern angeboten werden, die selbstverständlich so konstruiert wurden, dass sie in sich stimmig sind. Durch den weitestreichenden Freiraum im Modus *Selbst wählen* hingegen ist der theoretische Fall denkbar, dass die Kinder Zahlenmauern derart konstruieren – z.B. mit Leerstellen und Vorgaben an diversen Stelle –, dass diese sich nicht konsistent berechnen lassen, d.h. dass es u. U. überhaupt keine Lösung (weder im Bereich der natürlichen noch der ganzen Zahlen) geben *kann*. Wie vermeidet oder wie behebt nun der ZAHLENFORSCHER dieses Problem? Gar nicht! Und zwar aus verschiedenen Gründen:

Grundsätzlich unterliegt allen Mauern im Programm intern die relationale Aufbaustruktur der Zahlenmauer-Regel. Diese erlaubt ja in den o. g. Fällen der Software auch erst die Prüfroutine mittels Kontrolltaste. Das Programm könnte also technisch gesehen zurückmelden: ›Halt, dieser Wert passt an dieser Stelle nicht.‹ Die Kinder aber, die eine Mauer konstruieren, würden aufgrund der zahlreichen Vernetzungen und folglich auch der zahlreichen Veränderungsmöglichkeiten, die jeweils wieder Folgewirkungen an anderer Stelle der Mauer nach sich ziehen, permanent mit solchen Meldungen bombardiert, und das mit dem andauernden Effekt, dass eine Werteveränderung an der *bezeichneten* Stelle möglicherweise etwas repariert, dafür aber an einer anderen wieder ein Problem aufreißt. (Das macht übrigens die Schwierigkeit des 5. Forschungsauftrags aus; vgl. 5.2.5)

Der zweite Grund ist eine *didaktisch gewollte* Entscheidung: Durch derartige Fälle wird gerade die Vernetztheit der internen Strukturen in einer Zahlenmauer bewusst. Wenn also ein solches Problem auftritt – und das passiert auch ohne Computer –, dann ist es weitaus sinnvoller, es als solches zu thematisieren, zu verstehen (Warum ist das Reparieren so schwierig? Warum sind die Stellen für Wertevorgaben und Leersteine nicht beliebig? usw.) und dann selbstständig nach Auswegen zu suchen, als durch pausenlose falsch-richtig-Kommandos durch das Problem ›geführt‹ zu werden. Ganz im Sinne dieses (und des folgenden) Modus trägt das hier bewusst gewählte Vorgehen nämlich zur Sensibilisierung für strukturelle Beziehungen in Zahlenmauern bei. Es ist nicht zuletzt genau das Problem, mit dem sich *naturgemäß* (durch die Sache bedingt!) jemand befassen muss, der eigene Mauern konstruiert …

Fehlerbehandlung im Modus ›Forschen‹

Im Modus *Forschen* werden vielfältige Praktiken realisiert, je nach Kontext: So können bei der Erkundung eines Auftrags zum Teil die gleichen Freiräume gelten wie im Modus *Selbst wählen*, nämlich dann, wenn gänzlich freie Mauern konstruiert werden. In dem Fall gilt das zum vorausgehenden Modus Gesagte entsprechend.

Es gibt aber auch jene Fälle, wo wie im Modus *Rechnen* eine Überprüfung auf rechnerische Richtigkeit über die entsprechende Prüftaste angefordert werden kann, und zwar nur, wenn die NutzerInnen eine solche Prüfung gezielt wünschen. Fehlerauftreten und -behandlung entsprechen dann auch den Gepflogenheiten aus dem Modus *Rechnen*.

Und drittens gibt es Fälle automatischer bzw. ›erzwungener‹ Kontrolle, z.B. wenn vor dem Weiterarbeiten sichergestellt werden muss, dass bestimmte Eingangsbedingungen auch realisiert wurden. Das ist z. B. im 2. Forschungsauftrag der Fall, wo eine Überprüfung der Grundreihe erzwungen wird (enthält sie ausschließlich die gewählten Vorgabewerte?), bevor der Rest der Mauer zur weiteren Bearbeitung frei geschaltet wird.

3 Zielbeschreibungen

Ziele eines Unterrichtsvorhabens zu benennen, dient u. a. den Zweck, sich der Legitimation und Sinnhaftigkeit des Vorhabens zu versichern. Das Nachdenken über Lernziele wird aber dann fragwürdig, wenn es sozusagen ›rückwärts‹ erfolgt, d.h. wenn zunächst unter vorrangig methodischem Fokus eine Lernsequenz geplant und ihr dann erst *hinterher* ›passende‹ Lernziele zugeschrieben werden.

Insbesondere besteht diese Gefahr bei den sog. *allgemeinen Zielen* des Mathematikunterrichts (vgl. Krauthausen 1998b), wenn das Adjektiv *allgemein* im umgangssprachlichen Sinne verstanden wird und dann leicht alles und immer zutrifft: Natürlich (?) wird im Unterricht …

- das *Argumentieren* gefördert – denn schließlich stellen die Kinder sich gegenseitig im Unterricht ihre Lösungswege vor;
- das *Darstellen* gefördert – denn schließlich verschriftlichen oder verbildlichen die Kinder ja ihre Bearbeitungen;
- die *Kreativität* gefördert – denn schließlich können die Kinder eigene Wege beschreiten;
- das *Entdecken* gefördert – denn schließlich enthalten die Aufgaben zahlreiche Muster.

Das bedeutet aber: Diese allgemeinen Lernziele zu notieren und zu behaupten, ›passt‹ immer. Damit aber werden die Begriffsinhalte ausgehöhlt und diese Behauptungen zur Nullaussage. Ein solcher Lernzielkatalog verkommt zum bloßen Formalismus. Seine didaktische Rechtfertigungs- und Kontrollfunktion kann er nicht mehr erfüllen.

Dabei gibt es ein relativ einfach zu handhabendes Kontrollinstrument, um diese Gefahr zu vermeiden und damit auch die Liste der Lernziele pragmatisch kurz und ›ehrlich‹ zu halten:

Man prüfe, ob zu *jedem* als Lernziel ausgewiesenen Postulate auch *ganz konkret erkennbare* Maßnahmen der Organisation der Lernprozesse nachweisbar sind, die in gezielter und v. a. – für Lehrende wie Lernende – *bewusster* Weise der Zielerreichung förderlich sein können. Um

es am Beispiel des Argumentierens zu verdeutlichen: Nicht bereits die Tatsache, dass Kinder sowieso und immer ihre Lösungswege vorstellen und erklären, fördert bereits (gezielt) die Argumentationsfähigkeit (höchstens *en passant*, was aber vergleichsweise ineffektiv ist und auch dem Zufall überlassen bleibt). Um dies als Lernziel zu Recht auszuweisen, müssen konkrete methodische Maßnahmen erkennbar sein, die hierzu, für alle bewusst, realisiert werden, z. B.:

- Als Lehrperson regelhaft auf Erklärungen und Begründungen bestehen und dabei transparent machen, warum man das tut;
- Gütekriterien ausdrücklich zum Thema machen, so dass man lernen kann, was eine gute von einer weniger guten Argumentation unterscheidet;
- konkrete Schülerdokumente von im Prozess entstandenen (mündlichen oder schriftlichen) Begründungen/Argumentationen vergleichend auf diese Gütekriterien hin bearbeiten (Textarbeit).
- …

In diesem Sinne waren die Postulate und Ziele – das sieht man der folgenden Auflistung im Nachhinein natürlich nicht mehr an – der *Ausgangspunkt* der Software-Konstruktion. Erst *nach* der Entscheidung darüber, was durch die Software erreichbar sein sollte, folgten Überlegungen, durch welche Instrumente, Hilfsmittel oder Programm-Features dies geeignet zu fördern und zu fordern wäre.

3.1 Inhaltliche Ziele

Inhaltliche Ziele betreffen die zu erwerbenden Wissenselemente, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Haltungen. Durch die prinzipiellen Optionen des ZAHLENFORSCHERs lassen sich dazu bei adäquater Nutzung des Programms folgende Zielbereiche fördern:

- (Integrative) Übung der Addition und Subtraktion: Im Modus *Rechnen* als vorrangig anzusehen, in den weiteren Modi immanent durchgängig präsent.
- Förderung von heuristischen Strategien (z. B. Rückwärtsarbeiten, vgl. Polya 1995): v. a. im Modus *Forschen*, der *par excellence* auf diesbezügliche Fähigkeiten angewiesen ist und sie fördert.
- Mathematik-Treiben als Erkunden und Erforschen, d.h. als experimentellen Prozess verstehen lernen: Der Modus *Forschen* ist gleichsam durch dieses Verständnis definiert und anders gar nicht sinnvoll zu realisieren.
- Fähigkeit zu kooperativem Verhalten und produktivem Arbeiten in der Gruppe: Wird insbesondere im Modus *Forschen* gefordert und gefördert, unterstützt durch die Instrumente des Forscherheftes, durch das Ansprechen der Kinder in der Pluralform, durch die Ermutigung zur ›Veröffentlichung‹ (Ordner *Ergebnisse*).

- Metakognitive Kompetenzen (vgl. 2.4): Unterstützt durch die Instrumente *Forscherheft*, Ordner *Ergebnisse* und *Lernbericht*.
- Verfassen mathematischer Texte: Integrative Einbettung von Lernzielen des Sprachunterrichts bei der Nutzung von *Forscherheft* und Ordner *Ergebnisse*: Aufbau/Strukturierung von Texten, Abfolgelogik, Verständlichkeit, Adressatenbezug, Kontextbezug, Sachrichtigkeit, konventionelle Rechtschreibung und Grammatik.
- konstruktiver Umgang mit Fehlern und Irrtümern: Durch die unterschiedlichen Reaktionen des Programms auf Fehler kann die Sensibilität für unterschiedliche Fehlerkategorien und didaktische Orte gefördert werden. Der Verzicht auf Lösungsvorgaben seitens des Programms fördert die Selbstverantwortung für eigene Bearbeitungsprozesse und -produkte sowie die eigenständige Suche nach sinnvollen und hilfreichen Bewältigungsstrategien.
- Selbstverantwortung für eigene Lernprozesse und -produkte wahrnehmen; Verfahren der Selbstkontrolle: Im Modus *Selbst wählen* durch die nahezu unbegrenzten Freiheitsgrade. Durchgängig durch die nicht erzwungene, sondern der eigenen Entscheidung überlassene Prüfmöglichkeit; durch die mit der ›Veröffentlichung‹ (*Forscherheft*, Ordner *Ergebnisse*) verbundene Rechtfertigungskomponente sowie den *Lernbericht*.
- Fähigkeiten der Aufbereitung und Präsentation eigener Lernprozesse und -ergebnisse: Durch den sinnvollen Einsatz des *Forscherheftes* und des Ordners *Ergebnissse*.

3.2 Allgemeine Ziele

Um den Begriff der *allgemeinen* Lernziele nicht einem vagen umgangssprachlichen Verständnis zu überlassen, sei an das erinnert, was in einem (wenn auch bereits älteren, gleichwohl noch sinnvollen und als ›Jahrhundert-Lehrplan‹ bezeichneten) Passus eines Mathematik-Lehrplans (KM 1985) festgehalten war und wodurch zugleich der *Beitrag des Mathematikunterrichts zur allgemeinen Denkerziehung* deutlich wird:

- *Allgemeine fachspezifische Fähigkeiten:* argumentieren, kreativ sein, mathematisieren (ebd., 2 f.)
- *Fachspezifische Grundtechniken*: klassifizieren, ordnen, generalisieren/spezifizieren, analogisieren, formalisieren (ebd. 3 f.)

Des Weiteren sind für das Begriffsverständnis Winter (1975) und Müller/Wittmann (1984) hilfreich (vgl. zusammenfassend auch Krauthausen 1998). Im ZAHLENFORSCHER werden u. a. folgende allgemeine Lernziele ausdrücklich gefördert und gefordert:

- *Darstellen* (mündlich, schriftsprachlich, durch Skizzen, Tabellen u. Ä.) – v. a. im Modus *Forschen*, durch die Anforderungen im Umfeld von *Forscherheft* und Ordner *Ergebnisse* .
- *Argumentieren und Begründen/Beweisen*: Überall dort, wo in den einzelnen Modi über erkannte Muster reflektiert und nach Verursachungsfaktoren gefragt wird. Für die Grund-

schule sei hier auf die besondere Bedeutung und Effizienz sog. inhaltlich-anschaulicher Beweise verwiesen (vgl. Wittmann/Müller 1988; Krauthausen 2001), z.B. mit Hilfe von Felddarstellungen oder Punktmustern (vgl. 4.2.3 und 5.2.6).

- *Kreativ-Sein*: Beobachtung und Erkennen von Regelhaftigkeiten, Vermutungen aufstellen, selbstständig Zugangsweisen (auch alternative) finden, denkendes Probieren, … – all dies wird v. a. im Modus *Forschen* zur Selbstverständlichkeit und u. a. durch die ›virtuellen Kinder‹, die die BenutzerInnen mit gewissen Hypothesen konfrontieren, in den Bewusstseinshorizont gebracht.

Konzeptionelle Folgerung für den ZAHLENFORSCHER:

Der ZAHLENFORSCHER verfolgt inhaltliche und allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts in *integrativer* Weise. Er stellt dazu spezifische Werkzeuge bereit, die das bewusste Lernen fördern und fordern.

Die so angeregten Lernprozesse müssen jedoch durch eine entsprechende *Lern-* und *Unterrichtskultur* im computerfreien Unterricht grundgelegt und zur Selbstverständlichkeit des Lehr-Lerngeschehens werden.

4 Ausgewählte methodische Hinweise

In diesem Kapitel wird – in exemplarischer Weise – über besondere Phänomene berichtet, wie sie generell bei der Thematisierung von Zahlenmauern im Unterricht auftreten können, sich insbesondere aber in den zahlreichen Erprobungen der Forschungsaufträge im In- und Ausland ergeben haben.

4.1 Allgemeine Phänomene oder Empfehlungen

Elegante Königswege und experimentelles Erkunden einer Lernlandschaft

Die Mathematik wird im Alltag – oft zu einseitig – assoziiert mit Klarheit, Strukturiertheit, ökonomischer Knappheit, geschliffenen Werkzeugen, Formalisierung und Zielstrebigkeit. Ein Vorgehen gilt dann als besonders ›mathematisch‹, wenn es ohne viel Umschweife, fehlerfrei und auf dem möglichst kürzesten Wege ohne jegliche Redundanzen zum avisierten Ziel führt. Ja, auch das macht Mathematik aus – manchmal.

Aber ebenso gehört manchmal auch das Gegenteil dazu, insbesondere wenn es sich um Forschungsaktivitäten handelt – bei Mathematik im Entstehen, *Mathematik als Prozess* sozusagen. Hier können die Kennzeichen ganz andere sein: zeitweise Unklarheit über den Zielzustand, unklare Werkzeuge oder Voraussetzungen, suchendes Vorantasten, Probieren, Einzelfälle (auch extreme) testen, Ungenauigkeit, Intuition, Irrwege, Denkfehler, Gefangensein in (vielleicht de facto gar nicht existenten, sondern unbewusst selbst gesetzten) Grenzen, Verzweiflung und Frustration, unkonventionelle Notationsweisen usw.

»Think outside of the box!« lautete ein Merksatz, den ich an der Wandtafel in einer hawaiianischen Elementary School entdeckte und mit dem die Lehrerin ihre Kinder zu eigenen Wegen auch außerhalb ausgetretener Pfade zu motivieren pflegte.

All dies, was Forschungsprozesse in der Fachwissenschaft ausmacht, täte auch dem Mathematik-Treiben im Unterricht gut, weil er damit eben auch *authentischer* wird, anstatt den Lernenden fälschlicher Weise zu suggerieren, in der Mathematik sei stets alles klar und stringent, man müsse nur auf die ›richtige‹ Lösung kommen. Gemäß Freudenthal (1981) sollte es also nicht um das Vorsetzen und Nachkauen *fertiger* Mathematik gehen, sondern um Lernumgebungen für *zu verfertigende* Mathematik. »Mathematiklehrer [...] können Schülern helfen, indem sie ihnen den *versuchsweisen* Charakter mathematischer Tätigkeit nahe bringen« (Mason 1987; 4).

Betrachtet man den natürlichen (und nicht den bereits verschulten) Umgang von Kindern mit der Mathematik, dann lassen sich in der Tat auch frappierende Parallelen zum Vorgehen der mathematischen Forscher erkennen. Das haben nicht zuletzt die Erprobungen der Forschungsaufträge des ZAHLENFORSCHERs immer wieder gezeigt. Das in dieser Hinsicht vor-

liegende *Kapital*, das die Kinder für das Mathematiklernen mitbringen, gilt es zu bewahren, zu pflegen, zu stärken und anzuregen. Das mag für manche Lehrpersonen ungewohnt sein, stellt es doch so manche verinnerlichten Glaubenssätze infrage. Oder man denke nur an die *Zeit*, die das alles kostet! Und was hat man weniger als Zeit! Und weiß man als Erwachsener, zumal mit einem Lehramtsstudium ausgestattet, nicht besser als die Kinder, wo es lang geht und wie man am ›besten‹ zur Lösung gelangt?

Vielleicht aber können Lehrende von Lernenden mehr lernen als man landläufig glaubt; und vielleicht können sie mehr erreichen, wenn sie mehr zuhören, beobachten, verstehen anstatt belehren zu wollen. Nämlich dann, wenn man die Kinder in substanziellen Lernumgebungen mit der *Eigendynamik der Sache* in Kontakt treten lässt. Das ist nicht nur ein didaktisches Postulat, sondern allein schon der Machbarkeit unter Alltagsbedingungen geschuldet, denn die Lehrperson kann »nicht zur Drehscheibe sämtlicher Lernvorgänge werden und ›tatsächlich‹ alle Fäden in der Hand halten. Sie überfordert sich, weil sie sich zu viel und den Schülern zu wenig zutraut. Die Lösung des Dilemmas kann nur lauten: Kinder sind nicht länger Objekte von Vermittlung und Belehrung, sondern Subjekte, die das Lernen zu ihrer eigenen Sache machen – *wie vor der Schulzeit auch*« (Wielpütz 1998, 9 f.; Hervorh. GKr).

Bei vielen Kindern ist dann zu beobachten, dass sie zunächst relativ zufallsgesteuert vorgehen und z.B. beliebige, unzusammenhängend wirkende Beispiele erproben – wenn überhaupt, denn mit neuen Freiheiten muss man oft erst umgehen lernen. Lehrpersonen können es manchmal nur schwer mit ansehen, wenn nicht gleich (aus ihrer Sicht!) nahe liegende Wege beschritten und stattdessen (vermeintlich) ziellos und ›nutzlos‹ herumprobiert wird. Dieser Gefahr unterliegen Lehrpersonen dann, wenn sie ihren eigenen Informationsstand als Maßstab nehmen und daran gemessen einen Hang zur Ökonomie zeigen, indem sie das Vorgehen der Kinder zu organisieren versuchen. Eine Lehrerin z. B. ›straffte‹ den Lernprozess ihrer Klasse zum 11. Forschungsauftrag (Nullmauern) wie folgt: »Jeder macht nur zwei Möglichkeiten, wie er auf Null kommt. Die besten, die ihm einfallen. Jeder kriegt nur zwei Trefferblätter.« Sicher ist das andere Extrem (Blatt für Blatt mit der stets gleichen Strategie auszufüllen) nicht die Alternative, aber anstatt die Entscheidung unbegründet festzulegen, kann ihr Hintergrund den Kindern auch transparent gemacht werden (s. u.).

Eine Phase des Probierens oder auch, sich durch mehr als zwei analoge Beispiele selbst ein Sicherheitsgefühl aufzubauen, ist erst einmal normal und daher zuzulassen (allenfalls *zurückhaltend* zu beobachten). Zu frühes Eingreifen, und sei es noch so gut gemeint, stört die eigenständigen Denkprozesse. Das noch suchende, (uns Erwachsenen) vielleicht planlos anmutende, unsystematische Probieren ist ein natürlicher Schritt hin zu dann effektiveren und zielstrebigeren Strategien. Denn auch zufallsgeleitetes Probieren hilft, ein *Gefühl für das strukturelle Verhalten* einer Aufgabe zu gewinnen, und wandelt sich später, ggf. durch entsprechende Impulse (*allgemein strategische*, keine inhaltlichen Hilfen; vgl. das Prinzip der minimalen Hilfen) in ein mehr systematisches, planvolles Vorgehen. Das v. a., wenn der Aufwand für die Kinder erkennbar als zu hoch oder die Aussicht auf Erfolg durch Versuch-und-Irrtum als unwahrscheinlich erkannt wird.

Mehrere Male ist es bei verschiedenen Forschungsaufträgen vorgekommen, dass nach der Erkundungsphase dann im Sitzkreis beim Beginn der Diskussion des Erarbeiteten durchaus nicht alle Strategien oder Lösungen bereits gefunden waren. In einer Erprobung des 11. Forschungsauftrags ergab sich die letzte noch ausstehende Kategorie sogar erst kurz vor Stundenende und auch nur eher zufällig (vgl. Krauthausen 2006a). Auch in solchen Situationen ist es nicht erforderlich und sinnvoll, auf Vollständigkeit innerhalb einer Unterrichtsstunde zu drängen, wie es der folgende Lehrer versuchte: »Jetzt haben wir schon zwei Regeln. Jetzt möchte ich, dass ihr alle noch mal überlegt, wo kann hier noch eine Regel sein? Es gibt noch eine … und jetzt etwas schneller und zügiger bitte!«

Wenn Sie diese Lehreräußerung an die Kinder appellativ auf einen Wissenschaftler übertragen, dessen Forschungsprozess durch eine solche Information beschleunigt werden soll, dann werden Sie sofort spüren, warum sie unter einer Forscher-Metapher einfach nicht passt. Damit unterstellen wir dem Lehrer weder böse Absicht noch mangelnde methodische Kompetenz, denn solche Sätze rutschen uns allen – oft unbewusst – einmal heraus. Aber möglicherweise lässt sich die Sensibilität für derartige Situationen erhöhen, und das ist der Grund, warum hier davon berichtet wird.

Räumen Sie den Kindern also jene zeitlichen und unregulierten Freiräume ein, die mit Forschungsprozessen nun einmal verbunden sind, und lassen Sie sich nicht selbst durch voreilige Produkt- und Ergebnisfixierung, externe Zeitzwänge oder (vermeintliche) Optimierungsbedürfnisse zum vorschnellen Eingreifen verleiten!

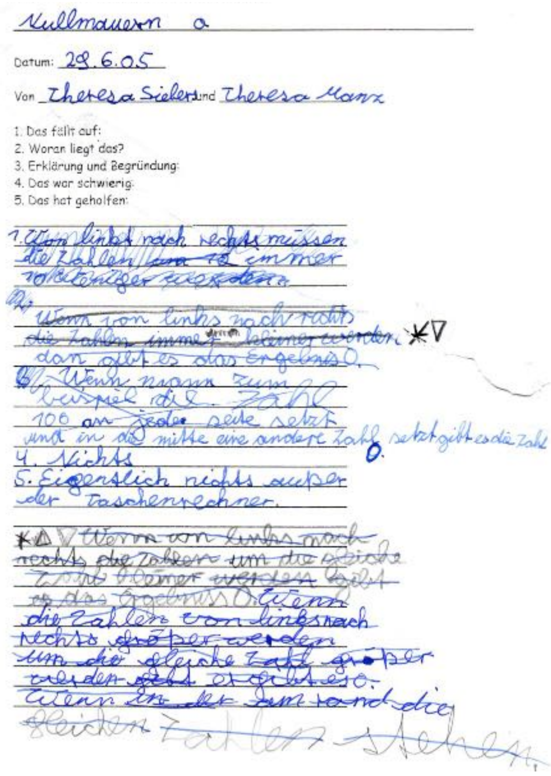
Das Zeitargument, welches diese Empfehlung natürlich erwartbar sofort provoziert, ist nur bedingt tragfähig. Natürlich bedeutet ein solches Vorgehen auf der einen Seite ein größeres Zeitdeputat, als eine Lerngruppe zielstrebig durch den Stoff zu führen. Aber das ist eben nur eine, die Kosten-Seite der Medaille. Auf der anderen, der Haben-Seite, steht weit mehr: günstigere motivationale Bedingungen (auf beiden Seiten übrigens, denn ein solcher Unterricht ist auch für Sie spannender!) wie solche für wirkliches und tieferes Verstehen, ein sehr viel breiteres Lernziel-Spektrum, das sich abdecken lässt (vgl. Kap. 3) sowie die wechselseitig entlastenden Integrationsmöglichkeiten auch mit dem Sprachunterricht, eine erleichterte Unterrichtsorganisation bei zugleich erhöhter inhaltlicher Substanz.

Texte im Mathematikunterricht

Das in der fachdidaktischen Literatur dokumentierte und nachdrücklich geforderte Verfassen von Texten im Mathematikunterricht kann nur nachdrücklich empfohlen werden. Rechnen Sie zu Beginn, wenn Ihre Klasse es noch nicht gewöhnt ist, im *Forscherheft* des ZAHLENFORSCHERs ruhig noch mit Lücken, Einwortsätzen oder vergleichsweise unbeholfenen Versuchen. Das ist ebenso wenig ein Problem wie die ersten ›Kritzeleien‹ in der Vorschule oder

noch unbeholfenen Schreibversuche im sprachlichen Anfangsunterricht, die von der Sprachdidaktik als Schreibakte durchaus ernst genommen werden. Alle Erfahrungen mit der Verschriftlichung von Vorgehensweisen oder Erklärungen/Begründungen zeigen, dass sich hier bald spürbare Fortschritte bei den Kindern einstellen.

Die Vorläufigkeiten, mit denen zu rechnen ist, reichen von Einwortsätzen (**Das fällt auf:** *immer 20*) über grammatikalische Eigenarten, in denen man förmlich miterleben kann, wie das Denken der Sprache vorauseilt. Und hier im Forscherheft ist das *Denken* das Wichtigste bzw. die Spontaneität und Unbefangenheit, sich überhaupt schriftlich zu äußern. Redaktionelle Überarbeitung erfolgen später, zu einem geeigneteren Zeitpunkt und an einem ausgewiesenen Ort (z. B. Ordner *Ergebnisse*). Falls Sie die Forschungsaufträge begleitend oder auch ausschließlich offline bearbeiten lassen, kommen als Zwischenstadien natürlich auch medienbedingte Probleme in den Blick: Das elektronische Editieren von Texten ist im ZAHLENFORSCHER unaufwändiger als auf Papier, wo die Texte vom möglicherweise unverständlichen Chaos erst in einer Reinschrift ihre Form finden müssen, wie die folgenden Dokumente von Theresa & Theresa (2. Kl.; Bissinger 2005; vgl. 4.2.11 und 5.2.11) zeigen:



Nullmauern a

Datum: 29.6.05

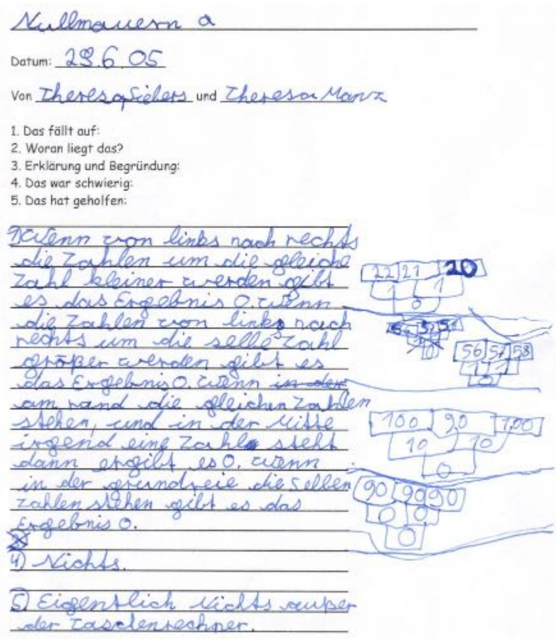
Von Theresa Sielers und Theresa Manz

1. Das fällt auf:
2. Woran liegt das?
3. Erklärung und Begründung:
4. Das war schwierig:
5. Das hat geholfen:

4. Nichts

5. Eigentlich nichts außer der Taschenrechner.

Forschung *in action*



Nullmauern a

Datum: 29.6.05

Von Theresa Sielers und Theresa Manz

1. Das fällt auf:
2. Woran liegt das?
3. Erklärung und Begründung:
4. Das war schwierig:
5. Das hat geholfen:

Wenn von links nach rechts die Zahlen um die gleiche Zahl kleiner werden gibt es das Ergebnis 0. Wenn die Zahlen von links nach rechts um die selbe Zahl größer werden gibt es das Ergebnis 0. Wenn am rand die gleichen Zahlen stehen, und in der Mitte irgend eine Zahl steht dann ergibt es 0. Wenn in der grundreie die selben zahlen stehen gibt es das Ergebnis 0.

4) Nichts.

5) Eigentlich nichts außer der Taschenrechner.

Forschung *presented*

Bei allen Vorläufigkeiten aber gilt es zu bedenken: »We get what we ask for« (Higgins 1988, 2), d.h. die Kinder verhalten sich entsprechend unseren Erwartungen: Geben wir uns mit bloßen Rechenergebnissen zufrieden, dann werden wir auch nur diese bekommen. Signalisieren wir ihnen aber, dass dies nur die eine Seite der Medaille ist und wir des Weiteren Erklärungen, Beschreibungen und argumentative Auseinandersetzungen erwarten und wertschätzen, dann werden sich die Kinder recht bald darauf einstellen (vgl. S. 8 das Verhalten von Vera). Das heißt nicht, dass man die Kinder hier in diese Richtung drängen sollte; geboten sind vielmehr Transparenz der Erwartung, Konsequenz und Geduld.

Dann werden die so entstehenden Dokumente der Kinder von unschätzbarem Vorteil für die unabdingbaren diagnostischen Aufgaben und Schlussfolgerungen der Lehrenden sowie gleichzeitig höchst ergiebige Dokumente für die gemeinsame Reflexion in der Lerngruppe über das Geleistete.

Sich auf den Weg machen

Mancher wird daran zweifeln oder skeptisch sein, dass die eigene Klasse die einzelnen Forschungsaufträge wirklich ›bewältigt‹. Ohne auf die Diskussion und die Publikationen zum Stichwort ›Unterschätzen und Unterfordern von Lernenden‹ einzugehen (vgl. u. a. Selter 1993 & 1995 und die entsprechenden Bezugsquellen):

- *1. Empfehlung:* Lassen Sie es doch erst einmal darauf ankommen. Es gibt zu viele positive Rückmeldungen von Lehrpersonen, als dass man sie noch als Einzelfälle abtun könnte, die davon berichten, wie die eigenen Kinder sie letztlich überrascht haben. Dass es auch gegenteilige Fälle geben mag, ist da kein Gegenargument für die Empfehlung, bevor man es nicht probiert hat.
- *2. Empfehlung:* Vermeiden Sie den voreiligen Schluss von sich auf andere. Der sachgerechte Umgang mit Anforderungen wie in den Forschungsaufträgen ist bei vielen heutigen Lehrerinnen oder Lehrern nicht unbedingt Teil der eigenen Lernbiografie, da die meisten eine andere Art von Mathematikunterricht erlebt und verinnerlicht haben. (Das kann auch die vergleichsweise kurze Zeit der Lehrerausbildung nur bedingt relativieren.) Folglich geht man in ganz bestimmter Weise an solche Aufgabenanforderungen heran:

oft zu formalistisch, zu ›eng‹. Das Vorgehen von Kindern ist da häufig ›unverdorbener‹, weil unbefangener. Und das eröffnet ihnen nicht selten Wege und Einsichten, die geeignet sind, Erwachsene zu überraschen. Aus eigenen (z. T. verständlichen, weil erklärbaren) Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Forschungsaufträge abzuleiten, dass sie dann aber gewiss für die Grundschulkinder zu schwierig seien, ist von daher alles andere als ein zwingender Schluss.

- *3. Empfehlung:* Es kommt nicht darauf an (erst recht nicht für jedes Kind), jeden Forschungsauftrag erschöpfend auszuarbeiten. Es ist normal (und kein Problem), dass Kinder unterschiedlich weit vordringen. Manche nehmen manches dann auch erst später in Angriff – der ZAHLENFORSCHER ist nicht umsonst jahrgangsstufen-übergreifend konzipiert.
- *4. Empfehlung:* Auch Vorläufigkeiten und Vagheiten sind normal und ebenfalls kein Grund, sich erst gar nicht heranzuwagen. Selbst der bescheidenste Versuch des Herantastens hat seinen Wert, kann zum Ausgangspunkt für Weiterführendes werden. »Keine Idee ist wirklich schlecht, wenn wir nicht unkritisch sind. Wirklich schlecht ist nur, überhaupt keine Idee zu haben« (Polya 1995, 177), und Letzteres haben wir bei sämtlichen Erprobungen nicht wirklich erlebt.

Gesammelte Erfahrungssplitter

Die Offline-Erprobungen haben teils übergreifende, teils für bestimmte Forschungsaufträge spezifische Phänomene gezeigt, die hier stichpunktartig zusammengestellt werden sollen, weil sie an vielen Stellen die Organisation der Lernprozesse erleichtern können.

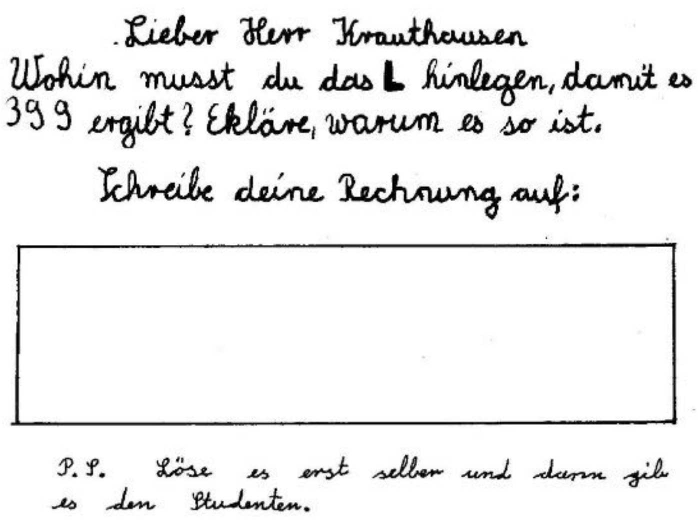
- Zur Bearbeitung der Forschungsaufträge können natürlich eigene in der Klasse eingeführte Bezeichnungen benutzt werden. (Keller vs. Grundreihe; Kopfstein oder Zielstein vs. Deckstein etc.). Andererseits musste im ZAHLENFORSCHER selbst eine durchgängige Sprachregelung getroffen werden. Oberstes Kriterium ist aber die Verständigung, und so sollte in der konkreten Lerngruppe beobachtet werden, ob unterschiedliche Sprachregelungen zu Verwirrungen führen.
- In vielen Fällen ist es hilfreich, zwischen sog. *Probierblättern* und *Trefferblättern* zu unterscheiden: Erstere sind Blätter mit Leerformaten (z. B. 12-15 leere Zahlenmauern auf einer Seite), auf denen nach Gutdünken frei experimentiert werden kann. Radieren, nach Erklärung und Begründung des Verbots, ist hier ausdrücklich untersagt und wird durch Durchstreichen ersetzt, da auch ›Fehlversuche‹ u. U. wichtige Informationen liefern können. Trefferblätter (nur 1 große leere Mauer pro Blatt) dienen demgegenüber dem Festhalten von Ergebnissen, also z. B. Mauern, die den gesuchten Bedingungen entsprechen. Da sie später für eine gemeinsame Reflexion allen zugänglich sein sollen, werden sie gut lesbar mit dicken Filzstiften beschriftet und können dann flexibel an der Wandtafel befes-

tigt werden, was wesentlich zeitökonomischer ist (v. a. bei den häufig notwendigen Umordnungen) als das jeweilige Anzeichen/-schreiben der Mauern.

- Wenn (hinreichend viele!) Trefferblätter in der Mitte des Gruppentisches zur Verfügung stehen (z.B. leere *unter* einem Ablagekörbchen, ausgefüllte *ins* Körbchen) – dann vermeidet das Laufereien in der Klasse bzw. ständiges Verteilen durch die Lehrperson. Die Kinder können konzentrierter arbeiten, weil weniger Bewegungsunruhe aufkommt.
- Mit der Forscher-Metapher kompatible Arbeitshaltungen und Umgangsformen sind unter Kindern nicht voraussetzungslos gegeben. Wie alle Fragen der Lern- oder Unterrichtskultur müssen sie erst thematisiert und eingeübt werden. Innerhalb einer Kleingruppe konnte z. B. der folgende Dialog zweier Gruppenmitglieder beobachtet werden (Forschungsauftrag *Deckstein 100 treffen*): »Ich hab 100!« »Mit welchen Zahlen?« »Sag ich *dir* doch nicht!« – nicht gerade förderlich für gemeinsame Fortschritte einer Forschergruppe und Anlass für ein pädagogisch wirkendes Gespräch, das die Hintergründe und wechselseitigen Motive transparent macht … Das Interesse am *gemeinsamen* Fortschritt sollte also betont werden, auch wenn es sicherlich natürlich ist, wenn bei der Auswertung der Beispiele die Kinder auch immer daran interessiert sind, *wessen* Mauer es denn ist, die soeben ausgewählt wurde.
- Auch bei der Nutzung des Taschenrechners lassen sich unterschiedliche Haltungen beobachten. Er wurde im ZAHLENFORSCHER implementiert, um die Produktion von Beispielmaterial zu unterstützen und zu vereinfachen. Und er erscheint nur, wenn zuvor einige Aufgaben selbst gerechnet wurden und wenn es nicht primär auf die Rechenfertigkeit ankommt, sondern auf die Mustererkennung und -bearbeitung (die dadurch auch schwächeren Kindern offen steht). Einige Kinder haben bei der Erprobung den Taschenrechner besonders lobend hervorgehoben und hätten ihn gerne häufiger zur Hand gehabt (weil das ›einfacher‹ sei). Ebenso gab es aber auch jene Zweitklässlerin, die meinte, man müsse sich den Taschenrechner doch erst einmal ›verdienen‹ (Bissinger 2005) – zwei Positionen, die das Spektrum der Einstellungen (und die didaktischen Orte für pädagogische Arbeit!) andeuten.
- Ein weiteres Phänomen im Zusammenhang mit dem Taschenrechner war dieses (ebd.): Er übt in der ersten Zeit (verständlicher Weise) einen gewissen Reiz auf die Kinder aus. In der Folge dieser Attraktivität haben die Kinder Freude daran, möglichst große Werte in die Zahlenmauern einzusetzen, da ihnen der Taschenrechner ja schließlich die Rechenarbeit abnimmt – und das soll sich schließlich lohnen. Allerdings können dadurch die Fragestellungen oder die Muster aus dem Blick geraten, weil die Begeisterung für die großen Zahlen von ihnen ablenken kann. Der erwähnte Neuigkeitseffekt des Taschenrechners ist gewiss nicht zu dramatisieren, sollte dieses Vorgehen jedoch zu Lasten der Einsichten anhalten, dann wäre aber auch hier die einfühlsame (und transparente) Einwirkung der Lehrperson erforderlich.

- Manche Kinder sind es u. U. nicht gewohnt, im Mathematikunterricht *probieren* zu ›dürfen‹ und sitzen dann ziemlich ratlos vor ihrem Probierblatt, weil sie eben nach dem Königsweg Ausschau halten oder eine plötzliche Eingebung erhoffen. In solchen Fällen sollte ausdrücklich dazu ermuntert werden, Freiräume zu nutzen. Man kann das ebenso lernen, wie man es auch gelernt hat (und wieder verlernen kann!), gleich immer alles richtig machen zu müssen. Die Kinder müssen erfahren können, dass diese Art des Mathematik-Treibens wertgeschätzt wird.
- Kinder, die noch keinen forschenden Habitus entwickelt haben, neigen auch häufig dazu, sich am Ziel aller Bemühungen zu wähnen, wenn sie *eine* Lösung gefunden haben. Erleichtert legen sie den Stift hin – fertig! Nach weiteren evtl. möglichen Lösungen Ausschau zu halten, nach anderen Wegen zu suchen (»Geht es auch anders?« als selbstverständliche Anschlussfrage), Ausdauer zu entwickeln, all das sind Lernziele, die sich nicht von selbst entwickeln, sondern die angeleitet werden müssen. Z. B. dadurch, dass die Lehrperson bereits ab dem 1. Schuljahr (zunächst in Stellvertreterfunktion, dann sukzessive zurücknehmend) immer wieder die beiden wertvollsten Fragen stellt, die man sich für Lernprozesse vorstellen kann: »Warum ist das so?« und »Geht es auch anders?/Gibt es noch weitere Lösungen?«. Mit der Zeit werden die Kinder ganz selbstverständlich diese Frage-*Haltung* bzw. einen wünschenswerten Habitus verinnerlichen (vgl. Vera, S. 8), wie auch das folgende Beispiel zeigt:

  Ich unterhalte einen Briefkontakt mit einer Grundschulklasse, in dessen Rahmen die Kinder kleine Problemstellungen oder Forschungsaufträge erhalten, die sie im Unterricht bearbeiten und deren Ergebnisse sie an mich zurück senden. Dass dies per Post geschieht, hat durchaus auch einen Selbstzweck (Adressatenbezug beim Abfassen mathematischer Texte). Sehr bald schickten die Kinder nicht nur die Bearbeitungen zu meinen Aufgaben, sondern auch selbst entworfene, die ich dann zu bearbeiten hatte. Ohne dass in irgendeiner Weise formal darauf hingearbeitet worden wäre, übernahmen sie dabei wie selbstverständlich meine Gepflogenheiten für ihre Arbeitsblätter (vgl. Abb.): Die Aufforderung zur *Erklärung* des Musters oder Vorgehens, die Verschriftlichung und den Appell zur Selbsttätigkeit.



Lieber Herr Krauthausen
Wohin musst du das L hinlegen, damit es 399 ergibt? Ekläre, warum es so ist.
Schreibe deine Rechnung auf:

P.S. Löse es erst selber und dann gib es den Studenten.

- Im ZAHLENFORSCHER wie auch im Unterricht werden Kinder immer wieder zu gemeinsamen Überlegungen ermuntert nach dem Motto »Beratet euch untereinander …«. Auch dies passt zur Forscher-Metapher, wenn man an kollegiale Diskussionen und gemeinsame Forschungsprojekte denkt. Diese gut gemeinte und richtige Aufforderung ist jedoch kein Selbstgänger: Kinder können diese Anregung nur dann sachgerecht und effektiv umsetzen, wenn sie wissen (und lernen können), was gutes Beraten ausmacht und was eher nicht dazu gerechnet werden kann. Zu diesem Zwecke ist zu empfehlen, die Integrationsrunden (Rechenkonferenzen) im gemeinsamen Sitzkreis *auch* dazu zu nutzen, um neben den Inhalten auch die Formen zu reflektieren (vgl. Redaktionskonferenzen, in denen nicht nur über den Inhalt, sondern auch über den typischen Sprachduktus des Journals diskutiert wird).
- Das Verbalisieren von Mustern und Argumenten ist weder selbstverständlich noch einfach (nicht nur für Kinder). Es muss bewusst geübt werden, was Spracharbeit, Arbeit an und mit Texten der Kinder bedeutet. Sprachförderung ist möglich und nötig *von Anfang an*, also bereits im 1. Schuljahr bei der Beschreibung und Erklärung von Strategien und Mustern. Durch diesen fächerübergreifenden Aspekt lassen sich also gemeinsame Ziele verfolgen, was auch zu zeitlichen Entlastungen führt.
- Der ZAHLENFORSCHER arbeitet in allen Modi, v. a. aber bei der Formulierung der Forschungsaufträge, zwangsläufig mit (Fach-)Begriffen. Inwieweit diese den Kindern bereits bekannt oder geläufig sind, muss in der konkreten Situation geprüft werden. So war einigen Kindern der Begriff der ›aufeinander folgenden Zahlen‹ nicht klar, was dazu führte, dass sie mit gleichen Zahlen in der Grundreihe rechneten. In der Software selbst ist, was *diesen* Fall angeht, insofern Vorsorge getroffen, dass bei Eingabe einer Zahl in die Grundreihe die anderen automatisch korrekt eingesetzt werden. Das ist aber ausdrücklich kein Ersatz für die ggf. noch nicht stabile Begriffsbildung bei einzelnen Kindern!
- Forschen ist eine soziale Aktivität. Von daher kommt der gemeinsamen Auswertung und Diskussion – als Zwischenbilanz oder abschließende Ergebnisrunde – eine besondere Bedeutung zu. Solche Phasen, die den meisten Grundschulklassen als Sitzkreis vertraut sind, benötigen aber deutlich mehr Zeit als ein schlichtes Ergebnis-Vergleichen nach dem Berechnen von Schulbuchaufgabe 3-5. Hier sind leicht ca. 20 Minuten einzuplanen. Kalkuliert man die Aktivitätsphase auf ca. 20-25 Minuten (was schon eine komfortable Zeitspanne für eine intensive Arbeitsphase ist), so kann eine solche Lernsequenz durchaus auch in das ›klassische‹ Stundenraster passen (nicht unwichtig für FachlehrerInnen, die die Klasse wechseln müssen).
- Generell sei aber die Empfehlung für alle Forschungsaufträge ausgesprochen: Sie wurden nicht von vorne herein oder gezielt für 45-Minuten-Raster konzipiert! Weder Hetzen noch sich in ihnen endlos verlieren, sondern der Eigendynamik der Sache Rechnung tragen, sollte als Leitmotiv gelten. Eine Doppelstunde wird sich vielfach als hilfreich erweisen; in

überschaubaren Zeiträumen von 3-4 Stunden lässt sich aber immer schon Beeindruckendes erarbeiten. Ein Forschungsauftrag kann aber auch einmal, z. B. im Rahmen der Freiarbeit, über mehrere Tage oder gar Wochen verteilt werden – ein Forschungsprojekt zwischendurch auch einmal eine Weile ruhen zu lassen (›Inkubationszeit‹), hat schon größeren Forschern zu signifikanten Durchbrüchen verholfen! Bewährt hat sich für die Bearbeitung ohne oder neben der Software, die Forschungsaufträge als solche in einem Forschungsordner zu sammeln, der für alle Kinder in der Klasse zugänglich ist und dem sie bei Bedarf entsprechende Vordrucke entnehmen können.

- In einigen Klassen hätte bei vorschnellem Urteil der Eindruck entstehen können, dass die Klasse mit dem gestellten Forschungsauftrag überfordert sei, was sich in mangelnder Motivation, Konzentration und Ausdauer ausdrückte. Die Argumentationskette ›mangelnde Motivation/Konzentration => Kinder überfordert‹ ist aber nicht immer zwingend bzw. die allein denkbare. Fehlende Arbeitshaltung als Teil einer implementierten Klassen-/Unterrichtskultur (!) kann durchaus sinnvolles und konzentriertes Arbeiten be- oder gar verhindern. Das Problem ist dann aber an einer anderen Stelle verursacht – nicht durch den angebotenen Inhalt – und muss daher auch an jener Stelle angegangen werden: Es ist eine pädagogische Aufgabe und kein Problem vermeintlich überzogener Zumutungen.

4.2 Exemplarische Phänomene zu einzelnen Forschungsaufträgen

Dieser Abschnitt bietet Impressionen aus den Erprobungen der Forschungsaufträge. Die Dokumente stammen aus unterschiedlichsten Klassen und Schulen, und sie haben auch unter verschiedenen Bedingungen stattgefunden, die sich vereinfacht wie folgt charakterisieren lassen:

- Online-Erprobungen anhand der Software und/oder offline-Erprobungen mit Papier und Bleistift, also ganz ohne Computereinsatz;
- Erprobung eines *einzelnen* Forschungsauftrags, in verschiedenen Klassen (mit selbstredend verschiedenen Rahmenbedingungen), also ohne Auswahloption für die Kinder;
- Erprobung des ›Gesamtpakets‹ in *einer* Klasse (der erprobenden Lehrperson), wobei den Kindern alle Forschungsaufträge zur freien Auswahl zur Verfügung stehen oder auch einzelne ausgewählt werden konnten. Ebenso war den ErproberInnen hier bewusst freigestellt, inwieweit die Bearbeitungen in den regulären Unterricht integriert wurden, da hier die Gewohnheiten der jeweiligen Erprobungsklassen nicht aufgebrochen werden sollten;
- Erprobung des ›Gesamtpakets‹ durch ein und dieselbe Lehrperson aber in *verschiedenen* Klassen, wobei den Kindern alle Forschungsaufträge zur freien Auswahl zur Verfügung standen. Im Folgenden wird aus dieser Kategorie v. a. immer wieder auf Dokumente aus

Bissinger (2005) zurückgegriffen, die im Rahmen ihrer Hausarbeit zur 1. Lehramts-Staatsprüfung drei Wochen lang diese ›Gesamtpaket-Variante‹ parallel in drei Klassen (2.-4.) einer Schule getestet hat, aus Gründen der damals noch eingeschränkt lauffähigen beta-Version des ZAHLENFORSCHERs übrigens auch on- wie offline.

So gesehen handelt es sich um eine breite Erprobungsbasis unter verschiedensten Rahmenbedingungen. Für die folgenden Darstellungen musste natürlich eine sehr begrenzte Auswahl getroffen werden. Die Dokumente können aber in dem Sinne als exemplarisch verstanden werden, dass es sich nicht um vereinzelte, sondern häufiger zu beobachtende Phänomene handelt. Und weiterhin kann, wenn gewisse Phänomene oder ›Belege‹ aus anderen Klassenstufen hier ›fehlen‹ sollten, daraus nicht geschlossen werden, dass sie in den umfänglichen Erprobungen nicht repräsentiert waren. Dies sei deshalb so hervorgehoben, um nicht den Eindruck aufkommen zu lassen, mehr oder anderes ›ginge nicht‹.

Es gehört mit zu den angenehmsten Vorzügen des Berufs von GrundschullehrerInnen, dass die Kinder stets für eine Überraschung gut sind. Lassen Sie sich also überraschen, und probieren Sie das eine oder andere selbst einmal aus …

4.2.1 Forschungsauftrag: Decksteine treffen

Teilauftrag a:
Der Deckstein einer 3er-Mauer soll genau 20 ergeben. Findet dazu verschiedene Lösungen und berichtet in eurem Forscherheft. Wie viele könnt ihr finden?

Teilauftrag b:
Probiert es auch mit 4er-Mauern und selbst gewählten Decksteinen (z.B. 50 oder 100).

Dieser Auftrag wurde mehrfach auch bereits in ersten Klassen erprobt. Beim gesuchten Deckstein 20 ist das für 3er-Mauern von den rechnerischen Anforderungen her auch gegen Ende des Schuljahres durchaus realistisch. Um die Vollständigkeit der möglichen Lösungen zu begründen, sind darüber hinaus Erfahrungen zum Ordnen und Sortieren bzw. auch allgemeine Problemlösefähigkeiten erforderlich.

Einige Erstklässler hatten schnell erkannt, dass es zu mühselig ist, die 3er-Mauern von unten nach oben zu bearbeiten und mit zufälligen Grundreihen-Belegungen die 20 zu erreichen:

- *»Von oben ist einfacher.«*
- *»Man muss dann nicht raten.«*
- *»Man kriegt dann keine falschen Ergebnisse raus.«*

Eine Lehrerin gab das Sortierkriterium (= 2. Reihe) vor und hängte eine Reihe von Trefferblättern (korrekte Mauern mit Zielzahl 20) unsortiert an die Tafel. Das Tafelbild sollte zuvor gut überlegt werden, um aufwändiges und zeitraubendes Reorganisieren zu vermeiden. Dass das Ordnen und Sortieren selbst in diesem Fall nicht trivial sein muss, zeigt diese folgende

Begebenheit: Folgende Mauern (es werden hier nur die jeweils 2. Reihen notiert, da alle zum Deckstein 20 führten) wurden von den Kindern herausgesucht und separat nebeneinander gehängt: (1|19), (18|2), (3|17), (16|4), (15|5).

Der (ansatzweise) Versuch einer Musterbeschreibung mündete in »links wird immer kleiner, rechts wird immer größer«. An der 2. Mauer wird die diesbezügliche Unstimmigkeit erkannt, sie wird ausgetauscht durch (2|18). Die Lehrerin fragte alsdann: »Müssen wir nicht noch mehr austauschen?«, woraufhin folgende Trefferblätter eingetauscht wurden: (4|16), (5|15), die Mauer (6|14) wurde daneben angeschrieben, da ein solches Trefferblatt nicht vorlag. Neben der (vorgegebenen) 20 im Deckstein stand dazu nur die 6 in einem Stein der 2. Reihe. Die fehlende 14 wurde von Jens mühsam *errechnet*. Diese Episode machte deutlich, wie schwer es für manche Kinder noch sein kann, die Übersicht über einen größeren Wahrnehmungsbereich zu nutzen. Jens fokussierte alleine auf die 2. Zeile *dieser angeschriebenen* Zahlenmauer. Es gelang ihm noch nicht, die davor stehenden Mauern einzubeziehen und i. S. einer operativen Variation zu nutzen. Vielleicht wäre es eine Hilfe für ihn gewesen, wenn durchgängig beim Anheften der Trefferblätter auch eine Versprachlichung erwartet würde (»Warum passt diese Mauer hier hin?«).

Und wäre nicht auch eine andere Tauschaktion ebenso möglich gewesen …? Als Lehrerin oder Lehrer sollte man hier offen sein und nicht die eigene favorisierte Anordnung verabsolutieren. Wir konnten in einer Erprobung erleben, wie über 20 Minuten lang (!) ganz offensichtlich zwei verschiedene Anordnungsweisen im Kopf des Lehrers einerseits und in den Köpfen seiner Klasse andererseits vorlagen und durch diverse Sortieraktivitäten ›durchgehalten‹ wurden, bis der Widerspruch offenkundig wurde. Hier griff der Lehrer ein, indem er durch – aus *seiner* Sicht sinnvolle – Fragen der Klasse zu der von ihm intendierten Sortierung ›verhelfen‹ wollte. Das Ergebnis waren schließlich irritierte Kinder, was auch nicht mehr aufgefangen werden konnte, als der Lehrer das Problem bemerkte und sich immerhin für sein Eingreifen bei den Kindern entschuldigte. (Er nimmt die Kinder damit ernst.) Am nächsten Tag hatten die Kinder dann eine neue Gelegenheit, ihr System durchzuhalten und kamen auch zum gewünschten Erfolg. Hier nun machte es Sinn, dass der Lehrer noch einmal die am Vortag offenkundig gewordene Vielfalt denkbarer Vorgehensweisen in Erinnerung rief und diese Erfahrung nutzte, um auch alternative Sortierweisen in den Blick zu nehmen.

Bedacht werden muss stets die Anforderung an eine Verbalisierung, sie sollte aber auch konsequent erwartet werden, denn (hier: mündliche) Muster*beschreibungen* sind hilfreich für denkbare Sortiervorgänge.

Als Ergebnis dieser Stunde kam diese (immerhin) 1. Klasse zu folgendem Tafelbild

(1|19), (2|18), (3|17), (4|16), (5|15), (6|14), (7|13), (8|12), (9|11), (10|10), (11|9), (12|8),

dann (mit Zwischenraum) (20|0),

wobei das Ergebnis mündlich zu folgender Zusammenfassung verdichtet werden konnte: »Die erste Zahl steigt, die zweite Zahl wird kleiner, bis eine von beiden Null ergibt.« In höheren Jahrgangsstufen wird man hier noch an einer präziseren Beschreibung arbeiten können.

Zum gleichen Forschungsauftrag schrieben Lukas und David (4. Kl.) Folgendes in ihr Forscherheft (orthografisch wiedergegeben wie im Original):

Das fällt auf: *Das zwanzig immer das Ergebniss sein muss. Das die größte zahl in der mitte nur zehn sein kann.*

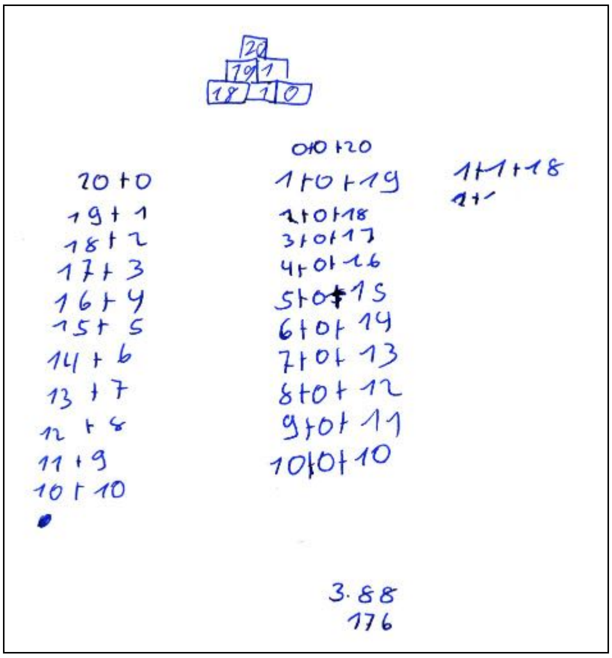
Woran liegt das? –

Erklärung und Begründung: *Es darf keine zahl unten in der mitte stehen die größer ist als ~~elf~~ zehn weil das ergebnis ist dann größer als zwanzig.*

Das war schwierig: *Heraus zu finden wie viele Aufgaben es gibt*

Das hat geholfen: *Das wir die mauern immer von oben bis unten ausgefüllt haben*

Zu diesem Text hefteten sie die unten abgebildete Aufstellung, die sie ohne den Computer auf Papier gefertigt hatten. Wie würden Sie als Lehrerin oder Lehrer das Forschungsergebnis von Lukas und David deuten? Wie sähe eine sachgerechte Rückmeldung für die beiden aus?



Einer Systematik auf der Spur: Lukas & David (4. Kl.)

4.2.2 Forschungsauftrag: Größter/kleinster Deckstein

Teilauftrag a:
Sucht euch vier beliebige Zahlen aus. Bildet damit verschiedene Grundreihen von 4er-Mauern. Wie erhält man den größten und wie den kleinstmöglichen Deckstein?

Teilauftrag b:
Probiert es auch mit drei Zahlen in 3er-Mauern oder fünf Zahlen in 5er-Mauern.

An diesen Auftrag haben sich bei Bissinger (2005) Kinder aus der 2. wie auch aus der 4. Klasse erprobt. Einige Auszüge (originale Rechtschreibung) aus den Forscherheften sollen hier als Andeutung und Ermunterung zum Selber-Tun ausreichen. (Die Ergebnisse aus der Bissinger-Untersuchung erfolgten z. T. auf Papier, da zu jener Zeit das elektronische Forscherheft in der Beta-Version des ZAHLENFORSCHERs noch nicht implementiert war.)

Lukas & David (4. Kl.) begannen mit Teilauftrag b, also an 5er-Mauern:

Das fällt auf: *Wenn die Größte Zahl in der Mitte ist und die beiden anderen größten Zahlen l. r. daneben sind dann kriegt man den größten Deckstein. (bei 5er mauern) Bei der kleinsten Zahl ist es genauso nur das dann die kleinste zahl raus kommt*

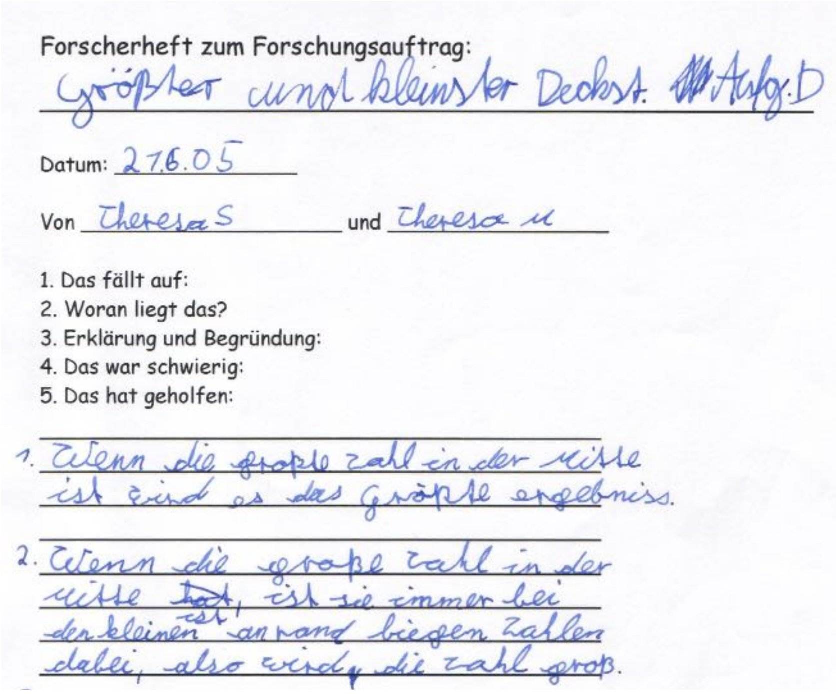
Zum Teilauftrag a (4er-Mauern) notierten die gleichen Schüler Folgendes:

Das fällt auf: *Bei vielen Rechenmauern kommt oft das gleiche Ergebnis. Wenn die beiden größten zahlen in der untersten reihe stehe und in der mitte sind kommt immer die größte Zahl dabei raus bei den kleinsten zahlen ist es genau so nur das das Ergebnis kleiner ist.*

Woran liegt das? *Weil die Zahlen die in der Mitte sind werden zwei mal Plus gerechnet und die äußeren Zahlen werden nur einmal Plus gerechnet.* [vgl. den Plättchenbeweis in 4.2.3! GKr]

Das hat geholfen: *Es hat geholfen das wir gestern schon den Auftrag B gemacht haben.*

Auch Theresa & Theresa aus der 2. Kl. erkannten bereits den Grund, warum sich eine Veränderung an Mittelsteinen anders auswirkt als bei Ecksteinen, denn die Mittelsteine gehen bei der Summenbildung für die 2. Reihe eben jeweils in zwei Summen ein (vgl. 5.2.3): *»Wenn die große Zahl in der Mitte ist, ist sie immer bei den kleineren an rand liegen Zahlen dabei, also wird die zahl groß.«*


Forscherheft zum Forschungsauftrag: Größter und kleinster Deckst. ~~…~~ Aufg. D

Datum: 27.6.05

Von Theresa S und Theresa U

1. Das fällt auf:
2. Woran liegt das?
3. Erklärung und Begründung:
4. Das war schwierig:
5. Das hat geholfen:

1. Wenn die große zahl in der mitte ist wird es das größte ergebniss.

2. Wenn die große zahl in der mitte ~~tut~~, ist sie immer bei den kleinen ist an rand liegen Zahlen dabei, also wird die zahl groß.

aus: Bissinger (2005)

4.2.3 Forschungsauftrag: Grundsteine vergrößern/verkleinern

Teilauftrag a:
Vergrößert oder verkleinert bei 3er-Mauern einen Eckstein der Grundreihe um 1.

Teilauftrag b:
Vergrößert oder verkleinert bei 3er-Mauern den inneren Stein der Grundreihe um 1.

Teilauftrag c:
Vergrößert oder verkleinert bei 4er-Mauern einen Eckstein der Grundreihe um 1.

Teilauftrag d:
Vergrößert oder verkleinert bei 4er-Mauern einen inneren Stein der Grundreihe um 1.

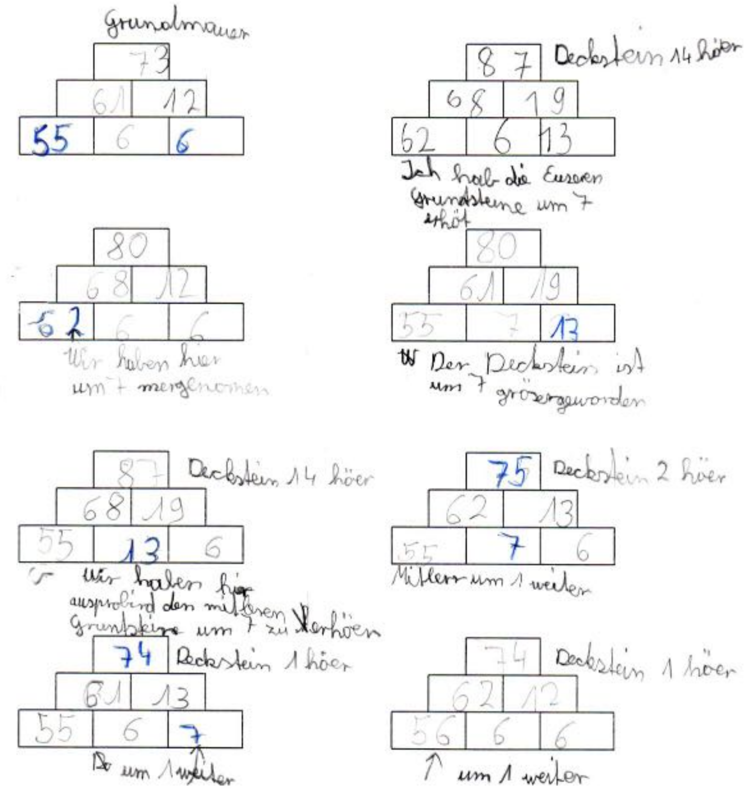
Was geschieht mit dem Deckstein? Erklärt in eurem Forscherheft, warum das so sein muss.

Im Abschnitt 5.2.3 wird der fachliche Hintergrund auf algebraisch-formalisiertem Niveau erläutert, einer Vorgehensweise, die noch nicht in der Reichweite von Grundschulkindern liegt. Diese tasten sich in aller Regel zunächst einmal über einige Beispiele an den Sachverhalt heran. Und das ist durchaus nicht ›unmathematisch‹, denn auf diese Weise lässt sich ein Gefühl für die Struktur und ihr regelhaftes Verhalten erwerben. Die Auswahl, Anordnung und

evtl. Kommentierung eines solchen exemplarischen Materials ist für Lehrpersonen von großem diagnostischen Wert, lässt sich doch nicht selten bereits hier erkennen, ob oder inwieweit eine Struktur verstanden wurde oder noch nicht. Dies kommt sehr jenen Kindern entgegen, die noch nicht über die wünschenswerten sprachlichen Ausdrucksmittel verfügen.

Das nachfolgend abgedruckte Beispiel der beiden Drittklässler Julian und Fabian zum Forschungsauftrag *Neue Decksteine* (Der Deckstein einer 3er-Mauer soll um 7 größer werden.) zeigt sehr schön, wie ein solches explorierendes Vorgehen aussehen kann: Ausgehend von der eigenen 3er-Mauer mit der Grundreihe [55|6|6] erhöhen sie zunächst *beide* Ecksteine um 7 ([62|6|13], wodurch der Deckstein um 14 anwächst. Dann nehmen sie die beschriebene Erhöhung für einen Deckstein wieder zurück ([62|6|6] und finden den um 7 erhöhten Deckstein als (eine) Lösung. Auf der Suche nach den möglicherweise verschiedenen Möglichkeiten (s. Forschungsauftrag) probieren sie noch wie folgt durchaus systematisch weiter:

- Erhöhung des Mittelsteins um 7 [55|13|6]: => Deckstein +14
- Erhöhung des Mittelsteins um 1 [55|7|6]: => Deckstein +2
- Erhöhung eines Ecksteins um 1 [55|6|7]: => Deckstein +1
- Erhöhung des anderen Ecksteins um 1 [56|6|6]: => Deckstein +1



Julian & Fabian (3. Kl.), aus: Bissinger 2005

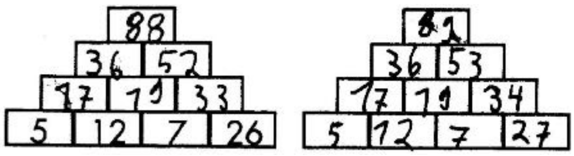
Neben solchen explorierenden Vorgehensweisen soll hier exemplarisch noch auf die Wirksamkeit *inhaltlich-anschaulicher Argumentationen* eingegangen werden (vgl. Krauthausen 2001). Für diese hätten auch zahlreiche andere Dokumente aus den Erprobungen gute Anknüpfungspunkte geboten. Nutzbar sind hierzu gängige Darstellungen oder Materialien des Grundschulunterrichts – z. B. Wendeplättchen, Cuisenaire-Stäbe, Punktfelder u. Ä. – und sind damit in der Lage, Zusammenhänge zu begründen, die nach traditionellen Vorstellungen (und mit formaleren Methoden) erst einige Jahre später im schulischen Curriculum auftauchen.

Wir haben es beim vorliegenden Forschungsauftrag mit einer klassischen *operativen Variation* zu tun (vgl. Wittmann 1985): Eine vorgegebene Zahlenmauer (= *Objekt*) soll nach einer bestimmten Vorschrift (= *Operation*) – Vergrößern/Verkleinern eines Außen- oder Innensteins – verändert werden; gefragt ist nach dem Effekt bzw. nach dem strukturellen Muster, mit dem sich diese Operation auswirkt (= *Wirkung*).

Wir betrachten im Folgenden den Fall einer *4er-Mauer*. Im ZAHLENFORSCHER beginnt der Auftrag mit einer 3er-Mauer, wodurch interessante Vergleiche nahe gelegt werden, da sich die *Wirkung* nicht einfach auf andere Mauerngrößen übertragen lässt. Die operative Veränderung soll in einer Vergrößerung eines Ecksteins (dann eines inneren Steins) um 1 bestehen. Dass wir mit den genannten grundschulspezifischen Mitteln auch hier jedwede andere Vergrößerung/Verkleinerung mit begründen können, deutet bereits den Allgemeingültigkeitsanspruch von inhaltlich-anschaulichen Beweisen an (vgl. auch Affolter et al. 2001, als PDF auf dieser CD).

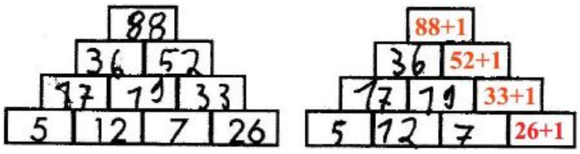
Betrachten wir ein Beispiel anhand konkreter Schülerdokumente (entnommen aus Scherer 1997). Ausgehend von der Ausgangsmauer mit vorgegebener Grundreihe [5, 12, 7, 26] sollte in der nächsten Mauer einer der Ecksteine in der Grundreihe um 1 erhöht und die Wirkung beschrieben werden:

- *Formal* lautet die Grundreihe mit vier (beliebigen) Zahlen [*a, b, c, d*], ihr Deckstein hat dann die allgemeine Form *a+3b+3c+d* (vgl. Kap. 5.2.3). Mit vorschriftsmäßig vergrößertem Eckstein lautet die Grundreihe nun [*a+1, b, c, d*], was zu einem neuen Deckstein der Form *a+1+3b+3c+d* führt, d. h. der Deckstein ist insgesamt auch um 1 größer als vor der Vergrößerung. Mit den konkreten Zahlenwerten sieht es so aus (aus 26 im rechten Eckstein der Grundreihe wird 27):

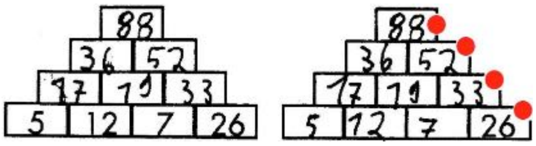


- Hier ist die Vergrößerung von 26 dadurch abzulesen, dass in der nächsten Mauer an gleicher Stelle eine 27 erscheint. Stattdessen hätte man ebenso die Veränderung in Gestalt

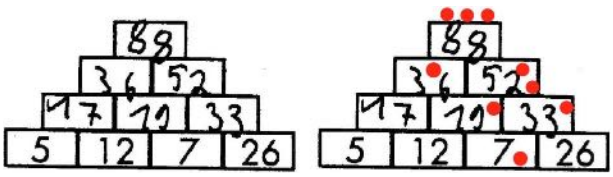
des unausgerechneten Terms darstellen können, also als 26+1. Setzt man diese Praxis der Termschreibweise fort (s. folgende Abb.), dann erscheinen an der rechten Seite der Zahlenmauer 33+1 statt 34, 52+1 statt 53 und schließlich im Deckstein 88+1 statt 89. Dadurch wird deutlich, wie die Vergrößerung um 1 beim Ausrechnen der neuen Mauer ›hoch wandert‹ bis zum Deckstein.



- *Inhaltlich-anschaulich* lässt sich der gleiche Sachverhalt ebenfalls darstellen: Statt die Vergrößerung wie gezeigt mit Zahlen oder Termen zu notieren, kann man ebenso gut ein Plättchen auf das 26er-Feld legen, wodurch der entsprechende Stein ebenfalls ›26 plus 1‹ enthält. Ausrechnen der Zahlenmauer zeigt, wie dieses Plättchen rechts (analog zur +1 in der Zahlenschreibweise) hoch wandert und auch hier den Deckstein um 1 vergrößert:



Auch die Vergrößerung eines inneren Steins um 1 lässt sich auf diese Weise anschaulich darstellen; in der folgenden Abbildung wurde der rechte innere 7er-Stein um 1 vergrößert:



Man sieht, dass nun das hinzugefügte Plättchen in der Reihe darüber in *zwei* Summen eingeht (in 12+7=19 und 26+7=33). Ebenso wirkt sich das Plättchen auf dem Stein 19 in zwei darüber liegenden Summen aus. Lediglich das Plättchen auf dem Randstein wirkt nur auf eine Summe ein, da es keinen zweiten Nachbarstein hat. Anhand der Plättchen ist also anschaulich zu verfolgen, wie sich die Vergrößerung des Zielsteins um ausgerechnet 3 ergibt.

Technische Anmerkung: Die in diesem Forschungsauftrag bearbeiteten Mauern zeigen auf der Arbeitsfläche und im Ausdruck (der Arbeitsfläche) in allen relevanten Steinen sowohl die (neue) Summe wie auch, in verkleinerter Darstellung, den zugehörigen Term an. Dies soll helfen, das Muster zu erkennen. Wenn solche Mauern als Abbildung von der Arbeitsfläche in das Forscherheft oder den Ordner *Ergebnisse* gezogen werden, geht diese doppelte Notation verloren, es wird nur die neue Summe im Stein angezeigt. Dafür gibt es einen technischen und einen didaktischen Grund:

Terme oder Plättchen sind in der reduzierten Größe entweder nicht mehr lesbar oder entsprechen nicht mehr den hohen Anforderungen an die Ästhetik des Screendesigns des ZAHLENFORSCHERs. Auch ist es gerade im Forscherheft/Ergebnis-Ordner didaktisch eine bewusste Anforderung, die Muster zunehmend geläufiger auch *verbal* beschreiben zu können. Der Informations-›Verlust‹ durch das Fehlen der doppelten Notation kann also durch entsprechende Maßnahmen relativiert werden.

Zusammenfassendes (Zwischen-)Ergebnis:

Die Vergrößerung eines Ecksteins um 1 bewirkt, dass auch der Deckstein um 1 wächst. Die Vergrößerung eines inneren Steins um 1 bewirkt, das der Deckstein um 3 größer wird. Machen wir nun noch den Schritt zur *Allgemeingültigkeit*, also für Vergrößerungen/Verkleinerungen um *beliebige* Werte:

Stellen Sie sich vor - und das ist auch bereits für Grundschulkinder transparent und nachvollziehbar - wir legen nicht *ein* Plättchen auf den zu vergrößernden Stein, sondern zwei oder drei. Was wird geschehen? Im Falle eines äußeren Steines wird der Deckstein ebenfalls um 2 oder 3 wachsen. Im Falle eines inneren Steines wird der Deckstein um 6 (= 3·2) bzw. um 9 (= 3·3) größer werden, wie man leicht durch Legeversuche feststellen kann.

Und nun legen wir keine einzelnen Plättchen in das zu vergrößernde Feld, sondern ein kleines *Ledersäckchen*, in welches wir zuvor, verdeckt für andere, eine gewisse Anzahl von Plättchen gesteckt haben (vgl. Sawyer 1964). Was wird geschehen? *Ein* Säckchen auf einem Eckstein führt zu *einem* Säckchen mehr auf dem Deckstein; *ein* Säckchen auf einem inneren Stein führt zu *drei* Säckchen mehr im neuen Deckstein. Das bedeutet - unabhängig von der konkreten Plättchenanzahl *im* Säckchen - dass es eine Vergrößerung um das Einfache bzw. um das Dreifache des Säckcheninhalts im neuen Deckstein geben wird.

Das Säckchen mit seinem unbekannten Inhalt ist aber nichts anderes als der formale mathematische Ausdruck für eine Unbekannte oder Variable, z. B. ein x, d. h. wir gelangen zu der eingangs gezeigten formal-algebraischen Darstellungsweise *des gleichen Ergebnisses*: Eine Vergrößerung von a oder d geht einfach (= mit dem Faktor 1) ein, eine Vergrößerung von b oder c geht dreifach (= mit dem Faktor 3).

Ein und derselbe Sachverhalt, lediglich ausgedrückt in einer anderen Sprache! Insofern sind inhaltlich-anschauliche Begründungen keine Spielerei oder fachlich defizitäre Versuche für (noch) unfähige Kinder, sondern vollwertige Beweise. Selbst in der Mathematik (als Fachwissenschaft) wird ernsthaft mit ihnen gearbeitet (vgl. Nelsen 1993 & 2000: *Proofs Without Words*). Man bedenke auch, dass schließlich die antiken Griechen ihre zahlentheoretischen Pionierleistungen aus nahe liegenden Gründen (unsere heutige Sprache der Algebra gab es seinerzeit noch lange nicht!) in vergleichbarer Form erbracht haben. Die inhaltlich-anschaulichen Vorgehensweisen des Grundschulkindes sind so gesehen sehr viel näher an den Wurzeln der Mathematik als jene formal-algebraischen Beweise, die wenige Jahrgangsstufen später thematisiert und dann oft genug unverstanden auswendig gelernt werden.

Eine Vielzahl von mathematischen Beziehungen schon im Mathematikcurriculum der Grundschule lassen sich mit dieser inhaltlich-anschaulichen Praxis transparent machen und begründen (z. B. in Form von Punktmuster-Beweisen; vgl. Krauthausen 1998a & 2001; Wittmann/Müller 1988 & 2004). Damit allerdings Kinder dieses so mächtige Werkzeug sachgerecht anwenden und nutzen können, müssen sie es – wie schließlich jedes Werkzeug – zunächst in seinem Gebrauch erlernen. Gleiches gilt übrigens auch für LehrerInnen, die in ihrer eigenen Schulzeit i. d. R. nie, während ihrer Lehrerausbildung noch zu selten mit dieser Praxis konfrontiert wurden und daher (noch) keine Routine in der Anwendung erlangen konnten – ein Grund übrigens, der dafür mitverantwortlich ist, dass sie geneigt sein können, so etwas für ›zu schwer‹ für ihre Klassen zu erachten.

Dies also müsste bedacht werden, wenn man den Einsatz solcher Argumentations- und Begründungsformen nutzen möchte. Es bedarf gezielter Anleitung und Förderung, auch entsprechenden Modellverhaltens. Aufgrund der meist fehlenden Selbsterfahrung mit anschaulichen Beweisen ist man als Erwachsener möglicherweise skeptisch, dass *so etwas* wirklich in der eigenen Klasse funktionieren würde. Alle Erfahrungen aber zeigen: Beginnt man *von Anfang an* (1. Klasse) mit entsprechend einfachen Beispielen (vgl. die Schülerdokumente in 5.2.6 zum Forschungsauftrag 6) und pflegt ein solches Vorgehen regelmäßig, dann wird man recht bald mit einer ganz selbstverständlichen Nutzung durch die Kinder rechnen dürfen.

Eine verstärkte Nutzung inhaltlich-anschaulicher Argumentationsweisen stünde auch der Sekundarstufe nicht schlecht an. Es ist wohl mehr als eine Vermutung, dass dadurch der Übergang bzw. der Zusammenhang zu formaleren Beweisverfahren konstruktiv im Hinblick auf wirkliches Verstehen unterstützt werden könnte (vgl. auch Wittmann/Müller 1988).

Als Hintergrundkompetenz muss auch von Grundschullehrpersonen ein souveräner Umgang mit elementarer Algebra erwartet werden. Auf den Einwand skeptischer Lehramtsstudierender, dass brauche man doch aber nicht im Unterricht der Grundschule, pflege ich zu antworten: Nicht *im* Grundschulunterricht, aber *für* Grundschulunterricht! Denn die algebraische Abklärung z. B. eines Aufgabenformats ist unerlässlich und oft die einzige Möglichkeit, sich den Hintergrund ohne endlose Beispielfolgen zeitökonomisch transparent zu machen. Und manchmal wird man dann doch auch *im* Grundschulunterricht damit konfrontiert, und wie will man dann mit folgender Erklärung eines Hamburger Viertklässlers sinnvoll umgehen?

Benny (4. Kl.) verallgemeinerte für Nullmauern (= Forschungsauftrag 11) eine Teil-Strategie: Nach einem Beispiel mit der Grundreihe 40|30|15 sagte er: »Man kann jede beliebige Zahl nehmen für x.«, und dann notierte er das Gemeinte wie folgt an der Tafel:

x3 | x2 | x1

x1 | x1

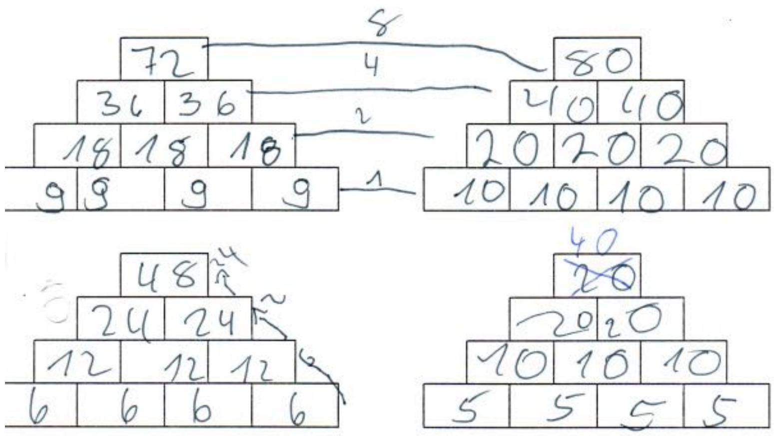
0

4.2.4 Forschungsauftrag: Besondere Grundsteine

> *Teilauftrag a:*
> *Untersucht 4er- und 5er-Mauern, in deren Grundreihen immer nur gleiche Zahlen stehen.*
>
> *Teilauftrag b:*
> *Untersucht 4er-Mauern, in deren Grundreihen nur Zahlen aus der gleichen Einmaleinsreihe (ab der 2er-Reihe) stehen.*
>
> *Was fällt euch auf?*

Auch diesen Forschungsauftrag haben erneut Kinder der 2. bis 4. Klasse zur Bearbeitung ausgewählt (Bissinger 2005). Der folgende Text ist (originale Rechtschreibung) dem Forscherheft von David & Selle (4. Kl.) entnommen. Er zeigt die Einsicht in die fortlaufende Verdopplung beim Teilauftrag a: *Gleiche Zahlen in der Grundreihe* (Zweierpotenz der Reihennummer; vgl. 5.2.4):

Das fällt auf: *Wenn in der Grundreihe immer die gleiche Zahl ~~müsste~~ steht müsste darüber immer das Doppelte bei rauskommen, z.b.*



David & Selle (4. Kl.), aus: Bissinger (2005)

Zum Teilauftrag b: *Einmaleinszahlen in der Grundreihe* schrieben sie den nachstehend abgebildeten Text (Bissinger 2005). Versuchen Sie ihn zu analysieren! Was haben die Kinder erkannt? Wo benötigen sie noch Hilfe? Wie würden Sie als Lehrerin oder Lehrer auf dieses Dokument konkret reagieren, wenn Sie es von David und Selle überreicht bekämen?

b) Wenn mann die erste mal 20 nimmt
kommt das Ergebniss dabei raus.
Und wenn mann die zweite Zahl
mahl 10 nimmt kommt auch das
Ergebniss raus. Die dritte zahl
geht nicht, aber wenn mann die letzte
zahl mal 5 nimmt kommt das
ergebniss raus. Wenn mann die dritte
zahl mal 10, nimmt und die erste Zahl
auch mal 10 dann muss mann
das ergebniss von der erstenzahl
muss das Ergebniss von der ersten
zahl bei dem ergebniss von
der dritten zahl abziehen
so bekommt den Deckstein.
In der ersten reihe ist es immer
das einfache in der zweiten
reihe das 2 fache und inder
dritten das vierfache. von
der 1x1 reihe

David & Selle (4. Kl.), aus: Bissinger 2005

4.2.5 Forschungsauftrag: Steine ausgleichen

> *Teilauftrag a:*
> *Berechnet eine eigene 4er-Mauer. Anschließend wird automatisch der mittlere Mauernstein um 1 vergrößert.*
> *Welche anderen Steine müsst ihr nun verändern, damit alle Rechnungen in der Mauer wieder stimmen?*
>
> *Katja sagt: »Da gibt es aber verschiedene Möglichkeiten.« – Könnt ihr Katja helfen?*
>
> *Teilauftrag b:*
> *Könnt ihr die Steine auch so verändern, dass der Deckstein trotzdem der gleiche bleibt wie zuvor bei der Ausgangsmauer?*

Die strukturellen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Zahlen erfordern ein ausdauerndes (systematisches) Probieren (vgl. 5.2.5). Das mag manche Kinder eher davon abhalten, diesen Forschungsauftrag anzugehen, andere fühlen sich *gerade dadurch* aber auch besonders angespornt, wenn sich das Problem einmal ›sperrig‹ verhält. Dem folgenden Textdokument von Lukas und David (Bissinger 2005) sieht man förmlich an, wie die beiden Viertklässler mit dem Problem ›ringen‹. Und man hat den Eindruck, dass es weniger die Einsicht, als vielmehr die entsprechende Versprachlichung ist, die sie (noch) daran hindert, Denken und Textproduktion in Einklang zu bringen (Notation wie im Original):

> **Das fällt auf:** *Man muss die beiden Steine die neben der veränderten Zahl stehn muss man um ein verkleinern, in der Grundreihe muss man immer was verandern. Wenn man die beiden zahlen neben der veranderten zahl gleich lasst dann ist das Ergebnis um zwei großer, dass dass Ergebnis immer genau veränderte zahl sein muss, dass man auch andere Decksteine treffen kann*
>
> **Das war schwierig:** *Das das die Aufgaben komisch waren weil das etwas wie ein Kreuzworträtsel war.*

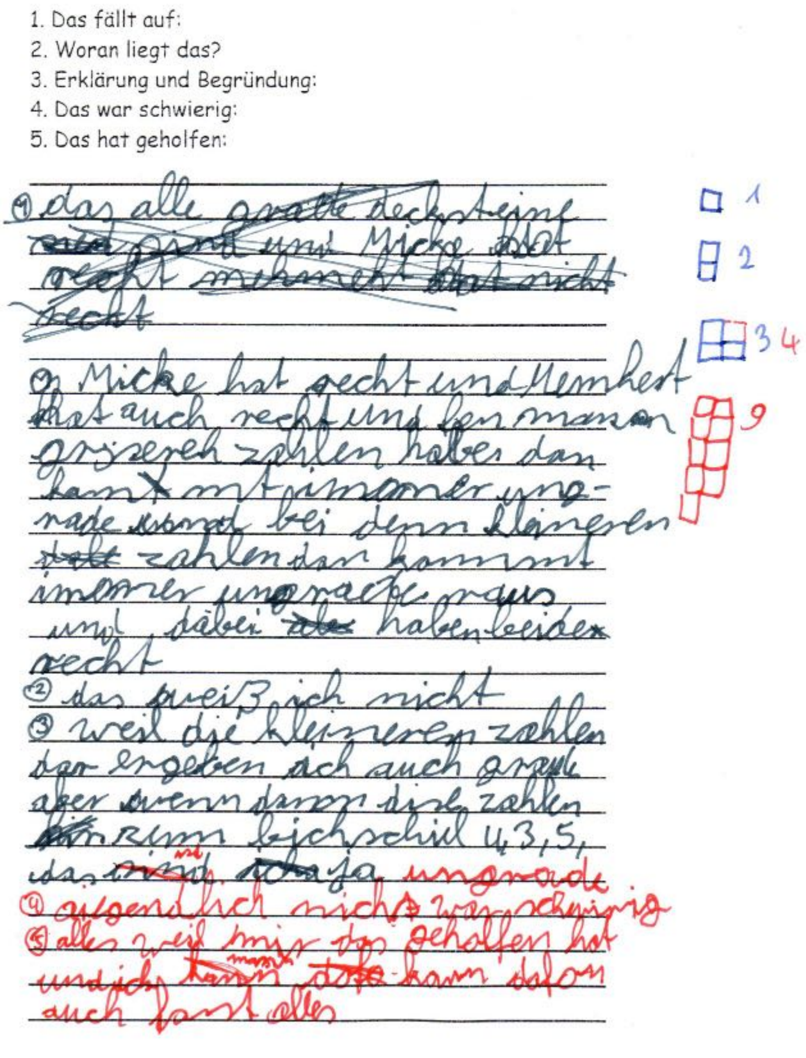
4.2.6 Forschungsauftrag: Gerade und ungerade Decksteine

> *Teilauftrag a:*
> *In einer 3er-Mauer soll im Deckstein eine gerade Zahl stehen.*
> *Maike sagt: »Dann müssen alle Grundsteine gerade sein.« Hat Maike Recht?*
> *Mehmet vermutet: »Genau ein Grundstein darf auch ungerade sein. Ich bin nur noch nicht sicher, welcher.« Könnt ihr ihm helfen?*
>
> *Teilauftrag b:*
> *In einer 3er-Mauer soll im Deckstein eine ungerade Zahl stehen.*
> *Lisa meint: »Genau ein Grundstein darf ungerade sein, egal welcher.« Hat Lisa Recht?*
> *Linus behauptet: »Alle Grundsteine müssen ungerade sein.« Überprüft seine Behauptung.*
>
> *Teilauftrag c:*
> *In einer 4er-Mauer soll im Deckstein eine gerade Zahl stehen.*
> *Rosalie behauptet: »Das geht nur, wenn alle Grundsteine gerade sind.« Hat Rosalie Recht?*
> *Marco vermutet, dass es auch anders geht. Überprüft seine Vermutung.*
>
> *Teilauftrag d:*
> *In einer 4er-Mauer soll im Deckstein eine ungerade Zahl stehen.*
> *Jens meint: »Wenn nur die beiden inneren Grundsteine ungerade sind, dann geht es.« Hat Jens Recht?*
> *Tanja behauptet: »Ein ungerader Grundsteine genügt, egal welcher.« Überprüft Tanjas Behauptung.*

Im 2. Schuljahr schreiben Elif und Gizem dazu Folgendes (Rechtschreibung wie im Original; vgl. Bissinger 2005):

Das fällt auf: *der Dekstein wird grade wen man unten die graden zahlen benutzt wen man 3 ungerade zahlen nemt rechnet man grade.* **Woran liegt das?** *Grade zahlen werden grade zahlen 2 ungeradezahlen werden grade zahlen*

Vergleichen Sie einmal mit den Darstellungen in 5.2.6! Die dort erläuterte inhaltlich-anschauliche Argumentation lässt sich auch bei Melanie und Angelina (3. Kl.) bereits erkennen – ebenso wie weiterer Klärungsbedarf, der sich den beiden selbst noch nicht ganz erschließt:



Melanie & Angelina (3. Kl.), aus: Bissinger 2005

4.2.7 Forschungsauftrag: Neue Grundsteine

> *Teilauftrag a:*
> *Berechnet zunächst eine eigene 3er-Mauer. Verändert die Grundreihe jetzt so, dass der Deckstein um 7 größer wird.*
> *Gibt es dazu verschiedene Möglichkeiten? Könnt ihr es in möglichst wenigen Versuchen schaffen?*
> *Reni kennt einen Trick: Sie schafft es sofort im 1. Versuch, die Grundreihe passend zu verändern. Findet ihr auch den Trick?*
>
> *Teilauftrag b:*
> *Berechnet zunächst eine eigene 4er-Mauer. Verändert die Grundreihe jetzt so, dass der Deckstein um 10 kleiner wird.*
> *Gibt es dazu verschiedene Möglichkeiten? Könnt ihr es in möglichst wenigen Versuchen schaffen?*
> *Methim hat einen Trick: Er schafft es sofort im 1. Versuch, die Grundreihe passend zu verändern. Vergleicht mit dem Trick aus Aufgabe a.*

Zwei Angebote zur Diskussion, erneut in originaler Orthografie der Kinder (vgl. Bissinger 2005):

> *Nils & Fabian (2. Kl.)*
>
> **Das hat geholfen:** *das wir bei der anderen Mauer abgekugt haben! Man kann in der mite anfangen. Mann muss in der mite muss immer 21 ergeben.*
>
> *Lili & Anna (3. Kl.)*
>
> **Das hat geholfen:** *Man muss minus Rechnen. Man muss von Hoben runter Rechnen. Man kann auch Umkehraufgaben Rechnen. Mann kann die Zalen um 1 oder 2 verendern.*

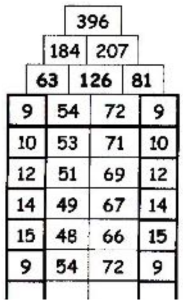
Haben Nils und Fabian bereits erkannt, dass man nicht jede Mauer für sich berechnen muss, sondern sich operative Zusammenhänge zu Nutze machen kann …? Was hat es mit der 21 in der Mitte auf sich? Und welches Verständnis von ›Umkehraufgaben‹ liegt bei Lili und Anna zugrunde? Die meisten Einsichten gewinnen Sie mit Sicherheit, wenn Sie es selbst versuchen und dann den Forschungsauftrag Ihren Kindern im Unterricht anbieten …

4.2.8 Forschungsauftrag: Eine Mauer – viele Grundreihen

> *Teilauftrag a:*
> *In einer 4er-Mauer ist die komplette 2. Reihe von unten vorgegeben. Für die Grundreihe gibt es hier mehrere Lösungen. Findet ihr sie alle?*
>
> *Teilauftrag b:*
> *In einer 4er-Mauer ist die komplette 2. Reihe von unten vorgegeben. Sucht jetzt eine Lösung mit gleichen Ecksteinen in der Grundreihe.*

Dieser Forschungsauftrag wurde u. a. in einem Parallelversuch in vier 4. Klassen an verschiedenen Schulen erprobt. Dabei zeigten sich z. B. folgende Bearbeitungsstrategien der Kinder (in Anlehnung an Nagel 2003; zur Lesweise der Abbildungen: die Grundreihe mit der korrekten Lösung (4. Reihe von oben) wurde jeweils *zuletzt* ausgefüllt; die vorausgehenden Experimente begannen in der Zeile darunter.):

- *Kevin* (Abb. rechts) arbeitete ›von außen nach innen‹: Er besetzte zunächst die beiden Ecksteine anforderungskonform mit der gleichen Zahl, hier (versuchsweise) mit 10. Die beiden Innensteine berechnete er mittels Subtraktion/Ergänzen in Bezug zu den Ecksteinen der darüber liegenden 2. Mauernreihe: 63-10 (= 53) und 81-10 (= 71). Die Summe der so erhaltenen Mittelsteine 53 und 71 ergab jedoch nicht wie durch die 2. Reihe vorgegeben 126, sondern 124. Es fehlten also 2, und so lag es für Kevin nahe, im nächsten Versuch 2 mehr (= 12) für die Ecksteine zu wählen.



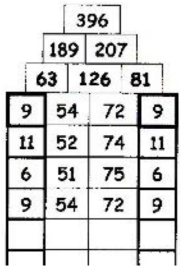
  Die Summe der Mittelsteine war nun 120 (also nicht 2 mehr, sondern gar noch weniger als vor der Erhöhung der Ecksteine!). Gleichwohl versuchte er nochmals eine Erhöhung der Ecksteine um 2 (auf 14) und danach um 1 (auf 15). Nun bemerkte er, dass die Summe der Mittelsteine immer niedriger wurde (124, 120, 116 und 114) anstatt wie gewünscht größer und dass er daher die Ecksteine verkleinern musste. Das versuchte er zielstrebig mit dem Wert 9, denn die 10 hatte sich ja bereits im 1. Versuch als zu groß erwiesen. Später begründete er sein Vorgehen vor der Klasse wie folgt:

  Kevin: *Das kommt alles in der Mitte nicht hin, da kommt 116 …* [bei 14 als Eckstein]
  L.: *Und wie du jetzt von dieser Reihe zu der gekommen bist, weißt du das?*
  Kevin: *Das ist ja alles da viel zu hoch … das kann ja alles nicht hinkommen. Also hab ich dann angefangen eher nach unten zu gehen und von unten mal anfangen.*

  Und Florian ergänzte wie folgt:

  Florian: *Ich hab herausgefunden, je kleiner die Zahl an den beiden Rändern ist, umso größer ist die Zahl, die dann oben, also oben in der Mitte, wenn 126 oben ist. 9* *war ja jetzt richtig und 15 war viel zu groß und umso kleiner die am Rand ist kommt es besser hin.*

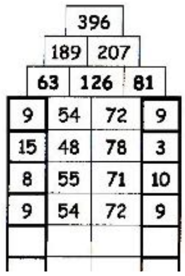
- *Malte* (Abb. rechts) ging ›von links nach rechts‹ vor: Wie Kevin besetzte er auch zunächst die Ecksteine identisch (versuchsweise mit dem Wert 11) und berechnete die Differenz zwischen dem linken Eckstein und dem äußeren Stein der 2. Reihe (63–11 = 52 = linker Mittelstein). Dann aber berechnete er – anders als Kevin – die Differenz aus diesem linken Mittelstein und der darüber liegenden Mitte der 2. Reihe (126–52 = 74), wodurch er den rechten Mittelstein erhielt. Konsequent war nun die letzte Differenz zu berechnen (81–74), deren Ergebnis dann aber im Widerspruch stand zum gewählten rechten Eckstein 11.



  Bei seinem nächsten Versuch wählte er den Wert 6 für die Ecksteine und rechnete diesmal von rechts nach links: 81–6 = 75, 126–75 = 51, aber 63–51 ≠ 6! Ihm fiel auf, dass es eine Differenz von 6 zum Erwartungswert gab, und diese verteilte er dann auf beide Ecksteine (jeder +3).

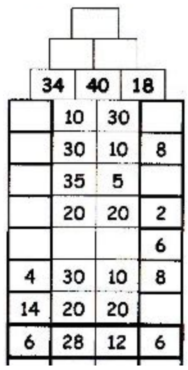
  Malte: Wenn man z.B. den ersten Versuch 6 hatte, 6 an beiden Seiten. Dann fehlten ja 6 zur Aufgabe, also zum Ergebnis, dass man das richtig hat. Dann muss man die 6 auf die beiden äußeren Zahlen aufteilen, und dann kann man das auch.

- *Robin* (Abb. rechts) begann nicht mit identischen, sondern mit unterschiedlichen Ecksteinen. Dabei schien er eine operative Beziehung der Differenzen zwischen den beiden Ecksteinen auszunutzen: Die Differenz seines 1. Versuchs betrug 15–3 = 12; bei seinem 2. Versuch betrug die Differenz nur mehr 10–8 = 2 und lag damit näher am Ziel. Seine Erklärung zeigt, wie er das gegensinnige Verändern ausnutzte:



  Robin: Also ich hab die 15 erst mal genommen. Dann hab ich gemerkt, dass das auf der anderen Seite 3 war und kleiner. Dann hab ich mal 8 genommen, aber dann hab ich auch gemerkt, dass es bei 10 war. Und dann wusste ich, wenn ich noch einen, bei 8 eine 9 einsetze, dann wird bei 10 auch einer weniger.

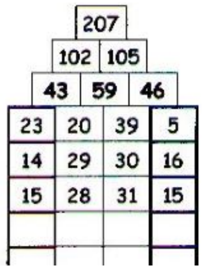
- *Michaela* (Abb. rechts) hat wiederum ein anderes Vorgehen gewählt: Sie begann beim Mittelstein der 2. Reihe (= 40) und zerlegte diesen auf verschiedene Weise. Sie trug dabei nicht immer auch die entsprechenden Ecksteine ein. Es scheint, dass sie die Grenzen der möglichen Werte abzutasten versuchte. Nach einigen Versuchen erkannte sie, dass der linke Innenstein ≤ 34 und und der rechte Innenstein ≥ 6 sein mussten. (Das geht so nicht aus der Abbildung, wohl aber aus dem Unterrichtsprotokoll hervor.) Da sie die 10 bereits (zweimal) für den



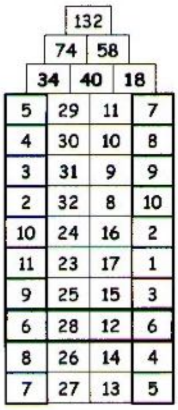
rechten Innenstein probiert hatte, wählte sie – wohl eher zufällig – dann die 28 bzw. die 12 für die Innensteine, was sie zur korrekten Lösung für die Ecksteine führte. Interessant ist, dass sie drei Zeilen darüber bereits einmal den Eckstein 6 notiert hatte, allerdings ohne die gesamte Reihe zu berechnen.

- *Alexander* (Abb. rechts) entdeckte ein besonderes Phänomen: Er ging bei seinen Versuchen ebenfalls zunächst von unterschiedlichen Ecksteinen aus. Diese addierte er jeweils und dividierte anschließend durch 2 (arithmetisches Mittel der beiden Eckpunkte; vgl. 5.2.8), wodurch er den gesuchten Wert für identische Ecksteine erhielt, z.B.: (14+16) : 2 = 15. In der Reihe über diesem Beispiel funktioniert dies nur deshalb nicht, weil sich hier ein Rechenfehler eingeschlichen hat (5 statt 7), ansonsten würde für diese Zeile gelten: (23+7) : 2 = 15. Seine Erklärung:

  Alexander: *Wenn man die beiden Steine als erstes ...*
  L.: *Du meinst die beiden Ecksteine?*
  Alexander: *Ja, die beiden Ecksteine zusammenzählt und dann die Hälfte nimmt, dann hat man die beiden gleichen Ecksteine.*



Nagel (2003) weist zur Frage der Werte-Auswahl noch darauf hin, dass die Kinder bei ihren Versuchen oft mit Zehner- oder Fünferzahlen operierten oder in Einer-Schritten variierten. Bei Zerlegungen wurden häufig stellenweise Zerlegungen gewählt (Z+E). Auch Wertetausch konnte beobachtet werden (8+10 und 10+8). Einige Kinder, die z. B. wie Linda (s. Abb. rechts) eine ganze Reihe Versuche unternommen hatten, formulierten auch selbst weiterführende Fragen wie z. B.: »Wie viele Reihen gibt es überhaupt?«. Würde Linda ihre 10 Versuche sortieren, was im ZAHLENFOSCHER sehr unaufwändig möglich ist (Sortiertaste; vgl. 1.1), dann würde sie das vermutlich auf eine Idee bringen, um sich ihre Frage selbst zu beantworten (vgl. 5.2.8).



4.2.9 Forschungsauftrag: Aufeinander folgende Grundsteine

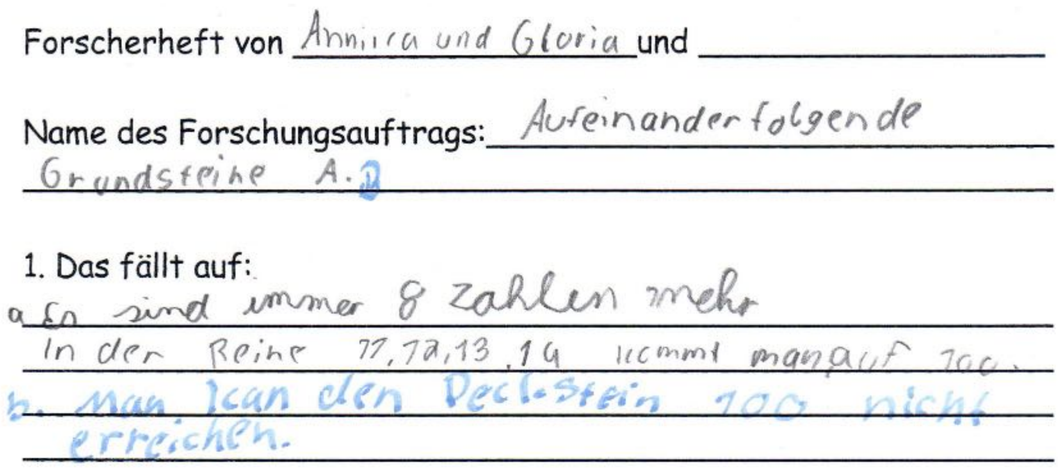
Teilauftrag a:
Leonid behauptet: »Ich kann vier aufeinander folgende Zahlen der Reihe nach in die Grundreihe einer 4er-Mauer eintragen, und als Deckstein erhalte ich genau 100!« Hat Leonid Recht?

Teilauftrag b:
Carsten glaubt: »Mit fünf aufeinander folgenden Zahlen (der Reihe nach) in einer 5er-Mauer kann man den Deckstein 100 nicht erreichen!« Hat Carsten Recht?

Da es zu diesem Forschungsauftrag nur eine Lösung gibt, muss *darüber* nicht lange geredet werden. Gehaltvoller kann hier eine Strategiediskussion sein:

- Wie seid ihr vorgegangen? Beobachtet werden kann z. B. …
    - unsystematisches Probieren,
    - beliebiger Versuch, um die *Größenordnung* zu finden, dann operatives Annähern. Ein Kind einer Erprobungsklasse ging sehr gezielt so vor, verrechnete sich dann aber ausgerechnet bei der Treffermauer, was zu Irritationen führte (Was nun …?),
    - zufällig genau den richtigen Eckstein als Erstes ausprobiert,
- Wie viele Versuche auf dem Probierzettel haben wir jeweils gebraucht?

Einzelne Kinder hatten nach drei Minuten die 100 gefunden, evtl. auch durch Zufallstreffer. Einige Kinder versuchten, den Deckstein 100 von oben nach unten über Zerlegen (Halbieren) zu erreichen, was angesichts der Bedingung aufeinander folgender Grundsteine ein aufwändiges Unterfangen werden kann. Andere übernahmen auch einfach die Lösung anderer – unter der Forscher-Metapher allerdings ein wenig tragfähiges Vorgehen. Annika und Gloria (4. Kl.; Bissinger 2005) haben nach systematisch variierten Grundreihen (mit den linken Ecksteinen 1, 2, 3, … 12) herausgefunden, dass sich der Deckstein in 8er-Schritten vergrößert (vgl. 5.2.9):


Forscherheft von Annika und Gloria und

Name des Forschungsauftrags: Aufeinander folgende Grundsteine A.2

1. Das fällt auf:
a. Es sind immer 8 Zahlen mehr
In der Reihe 11,12,13,14 kommt man auf 100.
b. man kan den Deckstein 100 nicht erreichen.

Annika & Gloria (4. Kl.), aus: Bissinger 2005

4.2.10 Forschungsauftrag: Wie viele Mauern …?

> *Teilauftrag a:*
> *Findet alle 4er-Mauern, in deren Grundreihe aufeinander folgende Zahlen (der Reihe nach) stehen und deren Decksteine zwischen 35 und 100 liegen. Wie viele findet ihr?*
>
> *Teilauftrag b:*
> *Elmar kennt einen Trick: »Ich kann herausfinden, ohne die Mauern alle auszurechnen!« Was macht Elmar wohl?*

Die Motivation war bei den meisten Erprobungen dieses Forschungsauftrags sehr hoch. Zahlreiche Kinder berechneten selbst während der Pause zwischen der Doppelstunde unermüdlich die ganze Tafel voller Zahlenmauern.

Insgesamt wurden häufig diverse Mauern mit Zielzahlen zwischen 35 und 100 gefunden, schwieriger war aber die Einsicht in das Muster der 8er-Schritte (vgl. 5.2.10), das Annika und Gloria im 9. Forschungsauftrag erkannt hatten (vgl. 4.2.9). Eine denkbare Ursache auf der Grundlage verschiedener Indizien wäre, dass der Blick der Kinder – hier wie auch bei anderen Forschungsaufträgen – durch ihre bisherigen Unterrichtserfahrungen relativ stark ergebnisfixiert in dem Sinne sein kann, dass man primär bemüht ist, ›passende‹ Mauern zu finden und damit dann die Aufgabe als erfüllt versteht. Einen ›2. Blick‹, hinter die Kulissen, auf die Muster oder gar ihre Begründungen zu werfen, gehört dann noch nicht zum gewohnten Verhaltensrepertoire. Eine weitere Stelle, an der es gilt, eine entsprechende Unterrichtskultur zu etablieren. Realistisch ist das nach allem, was die zahlreichen Erprobungen zeigten, allemal.

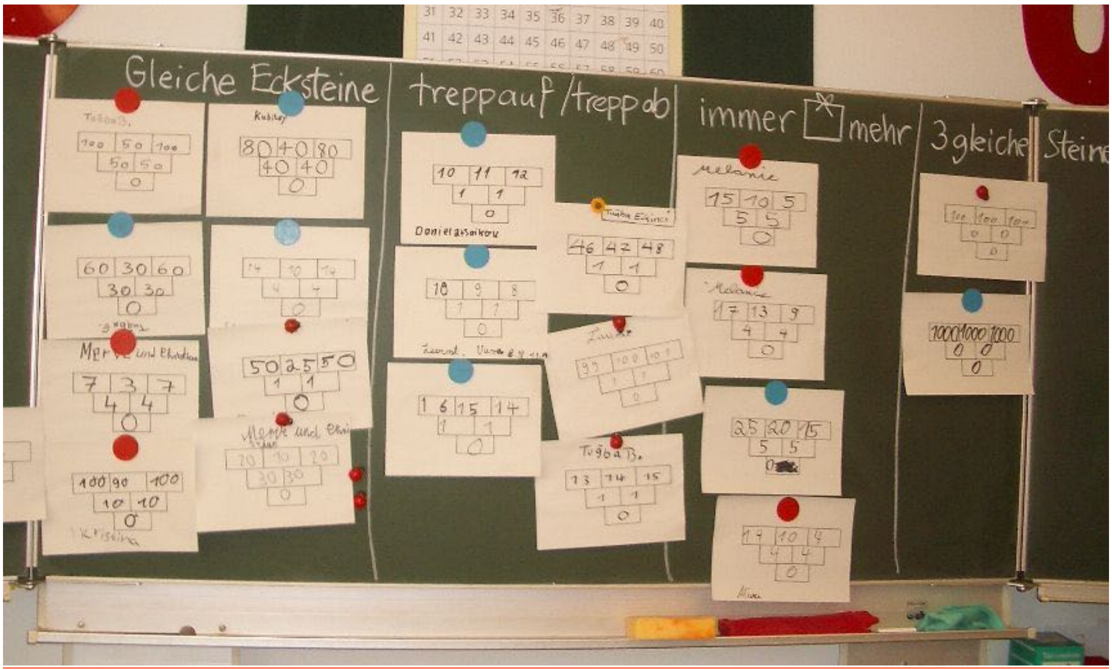
4.2.11 Forschungsauftrag: Nullmauern

> *Teilauftrag a:*
> *Achtung, neue Regel: In jedem Stein soll jetzt der Unterschied der beiden über ihm liegenden Steine stehen.*
> *Findet verschiedene 3er-Mauern, deren Zielstein auf Null endet. Wie muss man die Grundreihe bauen, damit solche Nullmauern entstehen?*
>
> *Teilauftrag b:*
> *Wie viele Nullmauern kann man bauen, wenn in der Grundreihe nur die Zahlen 0 bis 10 stehen dürfen?*

In den Fällen der Erprobungen, in denen den Kindern die Auswahl von Forschungsaufträgen überlassen war (um evtl. Präferenzen sichtbar werden zu lassen), hat sich dieser Auftrag als der ›heimliche Renner‹ herausgestellt. Und dies galt für ZweitklässlerInnen ebenso wie für SechstklässlerInnen.

In nahezu allen Erprobungen dieses Auftrags (Jahrgangsstufen 2-6) haben die Kinder sämtliche Bedingungen für die Grundreihe gefunden (vgl. 5.2.11 oder Abb. S. 68). Nicht in allen Klassen konnte auch Teilauftrag *(b)* erprobt werden, denn alleine für Teilauftrag *(a)* sollte man erfahrungsgemäß 45–60 Minuten netto einkalkulieren. Auffällig war, dass nahezu in allen Fällen die Strategie ›drei gleiche Zahlen‹ – an sich trivial, so sollte man meinen– *als Letzte* gefunden wurde. In einem Fall (3. Kl.) geschah dies erst gegen Ende der Stunde, nachdem im Sitzkreis über die gefundenen Strategien diskutiert worden war. Glücklicherweise drängte die Lehrerin hier nicht auf Vollständigkeit, sondern ließ der Eigendynamik des Geschehens den angemessenen Raum (vgl. Krauthausen 2006a).

Nach der Aktivitätsphase sammelte die Lehrerin die gefundenen Nullmauern ein und heftete sie unsortiert und unkommentiert an eine Seite der Tafel. Auftrag: Können wir Blätter entdecken, die miteinander ›verwandt‹ sind? Und warum? Was charakterisiert diese Verwandtschaft? Auf diese Weise ergaben sich i. d. R. Beispiele für alle relevanten Bedingungen (vgl. 5.2.11), die als Kategorien durch ein entsprechendes Tafelbild (s. u., Kl. 3) deutlich werden können.



Zwecks besserer Ansprache der Kategorien empfiehlt es sich, dass die Kinder sich passende Bezeichnungen ausdenken, die das Muster der Grundreihe anschaulich beschreiben. Dabei geht es nicht um einen konventionalisierten Fachbegriff, sondern um eine griffige, verständliche Bezeichnung. Hier ein paar Beispiele aus Erprobungen (aus Deutschland und den USA):

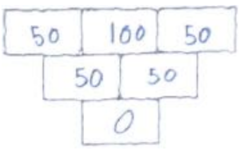
- Bezeichnung für *3 gleiche Zahlen* in der Grundreihe: drei gleiche Steine; alle drei gleich; gleich; nur gleiche Zahlen; Dreier

- Bezeichnung für *gleiche Ecksteine* in der Grundreihe: Gleiche Ecksteine; beide Seiten gleich; zwei Ecken
- Bezeichnung für *äquidistante Zahlen* in der Grundreihe: Immer … mehr/weniger (bei Abstand >1); treppauf-treppab (bei Abstand =1); auf und ab mit …; hin und zurück; der Reihe nach hoch/runter; Rolltreppe; Einerreihe (für Abstand =1)

Die letzte Kategorie wurde mal als eine einzige Kategorie behandelt und benannt (äquidistante Zahlen mit den Abständen ≥1). Mal wurde diese Bedingung noch einmal unterteilt: In benachbarte Zahlen (also Abstand =1) und äquidistante Zahlen mit einem Abstand >1. Beides ist selbstverständlich zulässig und zu akzeptieren.

Wenn es um die Beschreibung von beobachteten Mustern geht, die ja Grundlage für eine Kategorisierung der Grundreihen-Bedingungen sind, dann sollte man als Lehrperson nicht zu sehr die ›offiziellen‹ Muster für die vermeintlich alleinigen halten. Ansonsten wird man durch die Kinder schnell eines Besseren belehrt: Denn die Kinder, die ja noch nicht über jenen Wissensvorsprung verfügen, den eine Unterrichtsvorbereitung und die Informationen aus 5.2.11 zur Verfügung stellen, denken offener.

Sie entdecken Muster, die uns Erwachsenen oft kaum in den Blick kämen – vielleicht, weil wir schon zu sehr produktorientiert denken und alles am Endzustand messen, den man mit der Klasse gerne erreichen würde. Tauchen dann aber durch die Kinder plötzlich unerwartete Muster auf, dann kann das u. U. in der ersten Irritation dazu führen, dass man diese Beiträge für ›wenig zielführend‹ hält und sich genötigt fühlt, die Zügel zusammenführen und den Kindern gezieltere Hinweise in die ›offiziell‹ erwünschte Richtung geben zu müssen (»Ja schön, wer hat noch etwas anderes erkannt?!«). Betrachten wir dazu zwei Beispiele:



Beispiel (a)

Beispiel (b)

Diese beiden Mauern wurden in einer 3. Klasse als Erste aus dem gemeinsam erstellten Pool der Lösungsblätter heraus gegriffen. Es entstand dann eine Diskussion, ob sie als zusammengehörig gelten oder unterschiedlichen Kategorien zuzuordnen wären. Wer die inhaltliche Aufklärung des Forschungsauftrags im Abschnitt 5.2.11 im Hinterkopf hat, wird vermutlich sagen, dass beide in die Kategorie ›gleiche Ecksteine‹ gehören. Doch wie haben die Kinder argumentiert? Zunächst einmal mit einem Votum für *gleiche Kategorie*, allerdings aufgrund völlig anderer Kriterien: Sie gehören zur selben Gruppe, weil …

- in beiden Mauern die Zahlen 50 und 100 vorkommen;

- im Beispiel *(a)* die beiden jeweils diagonal übereinander stehenden 50er (der linke Grundreiheneckstein und der linke Stein der 2. Reihe, entsprechend für rechts) in der Summe 100 ergeben, was der mittleren Grundreihen-Zahl entspricht; und im Beispiel *(b)* ergeben ebenfalls zwei 50er (der Mittelstein der Grundreihe und die beiden Steine der 2. Reihe) in der Summe 100, die sich in den Ecksteinen der Grundreihe findet.

Und dann gab es auch noch eine Argumentation, warum diese beiden Mauern *nicht* verwandt sind und deshalb in zwei verschiedene Kategorien gehörten: Im Beispiel *(b)* bilden die 50er ein Dreieck, im Beispiel *(a)* nicht.

Im Folgenden sei nun etwas detaillierter aus Erprobungen berichtet, die ich an verschiednen Elementary Schools (3.-5. Klassen) in Hawaii durchführen konnte. Ein sehr detaillierter Bericht über Erfahrungen mit diesem Forschungsauftrag in einem 3. Schuljahr einer Hamburger Grundschule findet sich darüber hinaus bei Krauthausen (2006a).

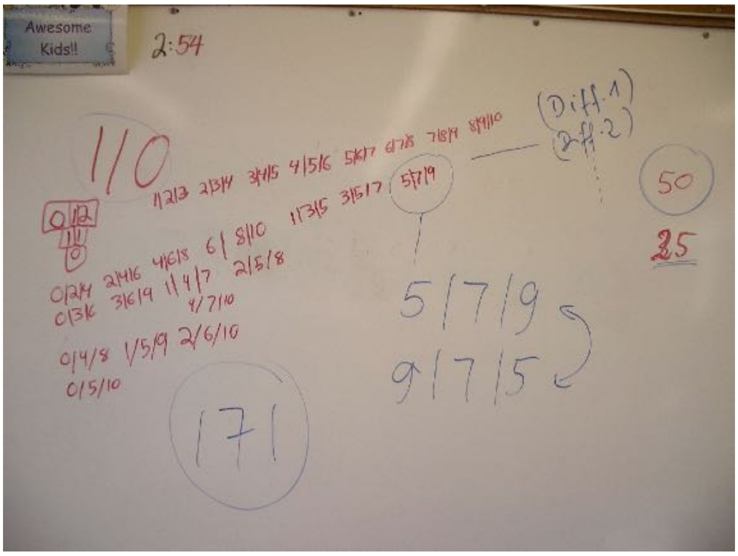
Im Hinblick auf die Effektivität bzgl. der natürlichen Differenzierung, durch die *alle* Kinder sinnvolle Aktivitäten und Beiträge leisten konnten, sei ein extremes Beispiel skizziert: In zwei 5. Klassen ließ sich das überaus heterogene Leistungsspektrum so beschreiben: Es gab Kinder, die den Unterschied zwischen 5 und 12 mit den Fingern ermittelten mussten (in der 5. Klasse!), und es gab – am anderen Ende des Spektrums, in derselben Klasse – jeweils 1-2 Kinder, die eine effiziente Systematik beim Ermitteln der Lösungsanzahlen (Teilauftrag *(b)*) durchführten und diese auch perfekt erläutern konnten.

Jonathan etwa benötigte für die Ermittlung aller möglichen Anzahlen für das Muster ›äquidistante Zahlen‹ nur ein einziges Probierblatt mit 18 Leermauern, von denen er keine komplett, sondern nur in der Grundreihe ausfüllte (zweimal auch bis zur 2. Reihe). Danach schrieb er folgenden Text, den er selbst zeilenweise wie unten zu sehen aufbaute und damit auch inhaltlich strukturierte (Zeilennummerierung und Übersetzung GKr):

(1) *Ich habe ausprobiert:*
(2) *Mit dem Unterschied eins gibt es 18 Möglichkeiten aufwärts und rückwärts.*
(3) *Mit dem Unterschied zwei sind es 14.*
(4) *…*
(5) *Mit dem Unterschied 4 sind es 6.*
(6) *Mit dem Unterschied 5 sind es 2.*
(7) *18, 14, …, 6, 2*
(8) *Muster im wachsen/kleiner werden von 4!*
(9) *Mit dem Unterschied von 3 müsste es 10 sein.*
(10) *Alles zusammen addiert müssten es dann 50 Möglichkeiten sein.*

Diese Verschriftlichung ist bereits sehr zielgerichtet und frei von Redundanzen. Außerdem zeigt sie sehr schön den wichtigen Übergang von der Beispielgebundenheit (Zeilen 2, 3, 5, 6) über das Erkennen eines Musters (Zeile 8) bis zum Aufstellen einer Hypothese (Zeile 9) – die

bei noch elaborierterem Vorgehen noch (allgemeingültig) zu prüfen wäre – und der entsprechenden Folgerung (Zeile 10). Im Hinblick auf die weitere Förderung der Problemlösefähigkeiten dient ein solcher Übergang zur Verallgemeinerung nicht zuletzt der Entlastung von aufwändigen Rechnungen, v. a. in Fällen, in denen der Beispielumfang weit größer sein kann als hier. Auch diese ›Ökonomiefunktion‹ schimmert bei Jonathan zumindest ansatzweise durch (Zeile 4).



In der Parallelklasse gab es für die Anzahl der Lösungen zum Muster ›Up/down by the same‹ (äquidistante Zahlen) zwei verschiedene Lösungsangebote: 25 und 50. Ein leistungsstarker Schüler entwickelte an der Tafel seine Begründung für die 25 Lösungen, indem er (s. Abb.) systematisch, nach Differenzen geordnet, die zugehörigen Grundreihen auflistete und damit seine 25 Lösungen begründete. Linda, das schwächste Mädchen der Klasse (zudem in der Sprachförderung), meldete sich darauf hin zu Wort und meinte, dass sie zwar genau so vorgegangen sei, aber: Man könne auch jede der 25 Lösungen noch mal ›switchen‹ (die Ecksteine vertauschen; vgl. in der Abb. den Doppelpfeil bei [5|7|9]; sichtlich stolz ergänzte sie, das seien andere Mauern, also andere Lösungen, also doppelt so viele wie 25, mithin 50. Nach 50 Minuten war dann auch die Gesamtsumme (= 171) für Teilauftrag b gefunden (vgl. Abb. sowie 5.2.11).

In den besuchten Klassen waren es die Kinder gewohnt, am Ende einer Lerneinheit *reflections* zu schrieben (vgl. 2.4: Metakognition) – individuelle Rückbesinnungen über das, was man erfahren und gelernt hatte bzw. welche Fragen noch offen geblieben waren. Auch dazu einige Beispiele, diesmal in der original belassenen Sprache und Rechtschreibung):

> *The most challenging part was when we had to figure out how many solutions their was to the first rule and to the second rule. My question was: How come one group got 50 and I got 25? My question was answered because the other group fliped the numbers around. Thank you for comming!* (Taylor)

Ein offensichtlich ambivalentes Verhältnis zur Mathematik (mit Anzeichen von Hoffnung?) offenbarte Samie:

> *Math is hard. I dont like it. But I can get better. I dont like it. But this was fun.*

Elli und Will formulierten gar weiterführende Fragen:

> *I like what you did for us. It was fun. Is there multiplication or division numberwall?*
>
> *I enjoyed doing all of the math problems! I like to learn new things. How many other categories are there?*

Und die bereits eben erwähnte und laut Lehrerin im Unterricht so häufig frustrierte Linda hatte gar richtig Auftrieb erhalten:

> *Thank you very much! I found everything hard but when you into it you would like it very much. I thought it was going to be very hard and now that you show me how, I love it. I dont want to stop doing this at home and show it to everyone I know. Thank you for showing me a whole lot I don't know, now that you show me how to do this I like math.*

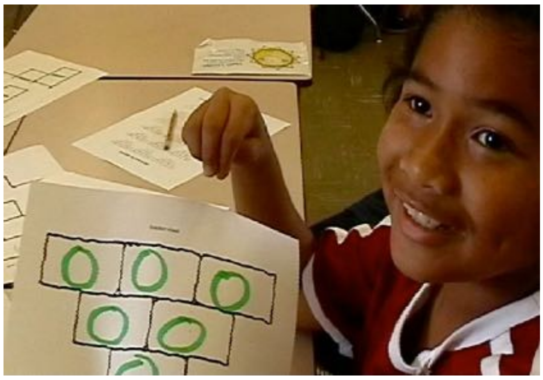
Brenson hatte noch ein anderes metakognitives Problem, nämlich was mich und meinen amerikanischen Kollegen in die Lage versetzt hat, mit solchen Aufgaben zurecht zu kommen:

- *When did you start doing this?*
- *How long did it take you to be this good?*
- *How did you learn the number walls?*

Viele Kinder stuften die Aufgaben zunächst als schwierig ein. Aber auch hier ist die Frage letztendlich, wie man das für sich wertet: als Grund, der Sache möglichst auszuweichen, oder als Ansporn, sich der Anforderung zu stellen, weil man daran wachsen will. Das hat viel mit der *Lernkultur* einer Klasse zu tun, die als solche gestaltbar ist! Kinder sind von Natur aus keine ›Anforderungs-Vermeider‹, und Unterricht kann dazu beitragen, dass sie es auch (durch Schule) nicht werden. Auch dazu aus einer hawaiianischen Schule ein Beispiel, wie die Klassenlehrerin zunächst einmal mit einer grundsätzlichen Akzeptanz auf das Kind reagiert, es dann aber auch zu höherer Leistung und höheren (Selbst-)Ansprüchen ansporntt:

Brian hatte eine Nullmauer mit der Grundreihe [0|0|0] auf ein Lösungsblatt geschrieben, als die Lehrerin hinzu kommt und sich folgender Dialog entwickelt:

L *Explain me the zeroes!*
B *Ok. First, I put zeroes on the three top ones.*
L *Ok …*
B *Then I subtracted the three zeroes, so they're two zeroes.* [s. Abb. rechts]
L *Ok …*
B *And then I subtracted those two zeroes, and I made zero.*
L *Ok … Did that require a lot of thinking, or minimal thinking?*



B [Zeigt schmunzelnd mit Daumen und Zeigefinger einen ›Nullabstand‹] *Minimal ...?*

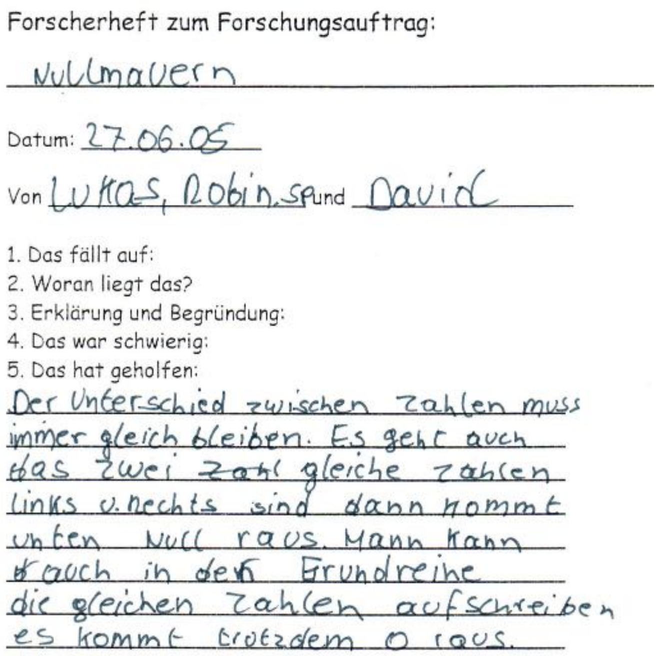
L *Yeah, and what do we want?*

S [Reißt die Arme weit auseinander und lacht; s. Abb. rechts] *Ha, a lot!*

L *Yeah! – So, try again ...*

Am weitaus häufigsten gefunden wurden Repräsentanten für die Bedingung äquidistante Grundsteine mit Abständen >1 (63,3 %), gefolgt von gleichen Ecksteinen (25,5 %) vor aufeinander folgenden Zahlen (Abstand = 1) und – vermutlich überraschend – drei gleichen Grundsteinen mit nur 5,5 %. Es gab klassische, erwartbare Muster bei den gewählten Zahlen in der Grundreihe, ohne dass in irgendeiner Form vorher darauf hingewiesen wurde: Zehnerzahlen, Einmaleinszahlen, große/kleine Zahlen. Und es gab aber auch ›ungewöhnlichere‹ Muster, z.B. Schrittfolgen außerhalb von und ›neben‹ Einmaleinsreihen oder interessante Schrittweiten wie z. B. [57|84|111] oder [1000|50.000|99.000], [1.000.000|41.000.000| 81.000.000].

Die Produktion der Lösungsblätter erfolgte sehr zügig. Sobald einmal ein Prinzip erkannt wurde, wurde es immer und immer wieder mit anderen Zahlen reproduziert (der verständliche Reiz des Funktionierens). Hier ist es ggf. sinnvoll, die Kinder situativ darauf hinzuweisen, dass *einige* Beispiele zu einer gefundenen und geprüften Strategie genügen, und dass man dann wieder nach *anderen* Mustern Ausschau halten sollte.



Forscherheft zum Forschungsauftrag:

Nullmauern

Datum: 27.06.05

Von Lukas, Robin, S und David

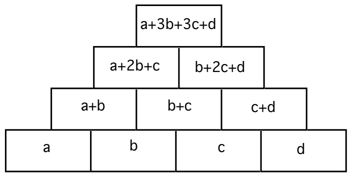
1. Das fällt auf:
2. Woran liegt das?
3. Erklärung und Begründung:
4. Das war schwierig:
5. Das hat geholfen:

Der Unterschied zwischen Zahlen muss immer gleich bleiben. Es geht auch das zwei Zahl gleiche Zahlen links u. rechts sind dann kommt unten Null raus. Mann kann auch in der Grundreihe die gleichen Zahlen aufschreiben es kommt trotzdem 0 raus.

Lukas, Robin, Selle & David (4. Kl.), aus: Bissinger 2005

5 Forschungsaufträge mit Zahlenmauern

5.1 Fachliche Hintergründe



Dem Format Zahlenmauer liegt folgende einfache Regel zugrunde: *In jedem Stein steht die Summe der beiden darunter liegenden Steine*. Je nachdem, ob und welche Werte in einer solchen Zahlenmauer vorgegeben/gesucht sind, erfordert das Ausfüllen Additionsaufgaben (Rechnen ›von unten nach oben‹) oder Subtraktions- bzw. Ergänzungsaufgaben (Rechnen ›von oben nach unten‹).

Die abgebildete allgemeine (algebraische) Form, die für die Klärung der Forschungsaufträge hilfreich ist, macht u. a. deutlich, dass sich im *Zielstein* Koeffizienten ergeben, die den Zahlen des *Pascalschen Dreiecks* entsprechen (in der folgenden Übersicht rechts):

Basissteine	Zielstein	Koeffizienten des Zielsteins
a	1·a	1
a, b	1·a + 1·b	1, 1
a, b, c	1·a + 2·b + 1·c	1, 2, 1
a, b, c, d	1·a + 3·b + 3·c + 1·d	1, 3, 3, 1
a, b, c, d, e	1·a + 4·b + 6·c + 4·d + 1·e	1, 4, 6, 4, 1
a, b, c, d, e, f	1·a + 5·b + 10·c + 10·d + 5·e + 1·f	1, 5, 10, 10, 5, 1
...	...	...

Anders ausgedrückt: Die Zahlen einer Zeile im Pascalschen Dreieck entsprechen den Koeffizienten der Binomischen Formeln:

$$(p+q)^0 = 1$$
$$(p+q)^1 = p + q$$
$$(p+q)^2 = p^2 + \underline{2}pq + q^2$$
$$(p+q)^3 = p^3 + \underline{3}p^2q + \underline{3}pq^2 + q^3$$
$$(p+q)^4 = \underline{1}p^4 + \underline{4}p^3q + \underline{6}p^2q^2 + \underline{4}pq^3 + \underline{1}q^4$$

Insbesondere sind am Pascalschen Dreieck folgende Muster zu erkennen:

- Jede Zahl dieses Dreiecks ist gleich der Summe der beiden rechts und links über ihr stehenden Zahlen. Um die nächste Zeile zu gewinnen, fügt man zudem vorne und hinten jeweils eine 1 an.
- Summiert man die Zahlen einer Zeile, so verdoppeln sich diese Zeilensummen fortlaufend: Sie ergeben, bei 2^0 beginnend, aufsteigende Zweierpotenzen: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ...

Die formale Schreibweise mag den Eindruck entstehen lassen, dass diese Phänomene oder Strukturen für Grundschulkinder (noch) keine unterrichtliche Relevanz hätten. Tatsächlich gibt es aber für diese Altersstufe kindgerechte Lernumgebungen etwa zum Pascalschen Dreieck (vgl. Gerdiken 2000; Gerdiken et al. 2000; Jäger 1985; Schönwald 1986; Winter 1989). Unabhängig davon ist es aber für Lehrpersonen (grundsätzlich) als fachliches Hintergrundwissen für die Unterrichts-*Planung* von Bedeutung, um das Potenzial einer Aufgaben- oder Problemstellung vorab ausloten, adressatenbezogen ausschöpfen und v. a. auch auf unverhoffte Fragen der Kinder (z. B. nach sehr großen Mauern) sinnvoll reagieren zu können.

5.2 Die Forschungsaufträge

Drei Vorbemerkungen zu allen Forschungsaufträgen:

- Im Folgenden wird versucht, die einzelnen Aufträge und ihr unmittelbares Umfeld inhaltlich aufzuklären. Dies geschieht vergleichsweise weitgehend (vgl. die Anmerkungen dazu in der Einführung). Lediglich einzelne Facetten sind nur angedeutet und Ihrer Eigenaktivität überlassen. Außerdem bedeutet der jeweils dargestellte Argumentationsgang oder die gewählte Darstellungsweise nicht, dass dies jeweils die einzigen Möglichkeiten wären. Die Frage »Geht es auch anders?«, von Kühnel als der Zauberstab des Lehrers bezeichnet, hat also auch hier ihre Gültigkeit.
- Bei der Erläuterung der Hintergründe wird in unterschiedlichem Ausmaß auch auf algebraische Darstellungen zurückgegriffen. Diese ermöglicht z.B. ein *Berechnen* von Lösungs-Anzahlen und entbindet damit vom aufwändigen und langwierigen Aufschreiben aller Einzellösungen. Dieses Vorgehen ist i. d. R. noch nicht in der Reichweite von Grundschulkindern. Das bedeutet aber andererseits nicht, dass die Lösung den Kindern verwehrt wäre. Algebraisierendes Denken und formal-algebraische Notation oder Termumformungen sind zunächst einmal unabhängige Qualitäten (vgl. Winter 1982, 196). Denn es geht eben oft auch anders als formal-algebraisch, z.B. durch eine inhaltliche Argumentation (vgl. Fischer/Hengartner 1999), die ja einen Zusammenhang strukturgleich und nur in einer anderen Sprache ausdrücken kann, wie wir z. B. in 4.2.3 oder 5.2.6 gesehen haben. In höheren Jahrgangsstufen kann natürlich die formalere Vorgehensweise im Zusammenhang mit der Einführung der Algebra zum Umgang mit Zahlenmauern genutzt werden (vgl. Hefendehl-Hebeker 2001, Kopp 2001 & als PDF auf dieser CD, Müller 2005 & als PDF auf dieser CD).
- Nicht zuletzt aber bedienen wir uns im Folgenden auch deshalb der Algebraisierung, weil sie ein erforderliches und wichtiges Werkzeug für LehrerInnen (auch der Grundschule) ist, um die fachlichen Hintergründe zahlreicher Lernumgebung für sich selbst vorzuklären. Man braucht sie also nicht *im* Unterricht, aber *für* Unterricht. Und zwar nicht zuletzt aus

Ökonomie-Gründen: Denn niemand hat die Zeit, im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung stundenlang Zahlenmauern durchzuprobieren. Zumal dann evtl. immer noch nicht feststeht, ob man tatsächlich *alle* Lösungen gefunden hat oder ob das Beobachtete nur durch die zufällige Auswahl der Beispiele zustande gekommen ist. Mit Hilfe der Algebra hingegen lassen sich alle Forschungsaufträge und andere Fragen rund um Zahlenmauern meist in wenigen Zeilen zuverlässig und vollständig aufklären, wie die Darstellungen im Folgenden zeigen werden.

Zur Auswahl eines Forschungsauftrags:

Bei Klick auf den Auftragszettel wird zunächst der gesamte Auftrag inklusive aller Teilaufgaben angeboten. Hier kann dann durch erneuten Klick die gewünschte Fragestellung ausgewählt werden.

Auf der dann erscheinenden Bearbeitungsseite steht der Auftragstext in einer aus-/einklappbaren Banderole am oberen Rand stets zur erneuten Einsicht oder Rückversicherung bereit.

Einige Forschungsaufträge erscheinen mit automatisch geöffneter Banderole, da relevante Informationen zur Bearbeitung die Kurzfassung textlich überladen hätten.

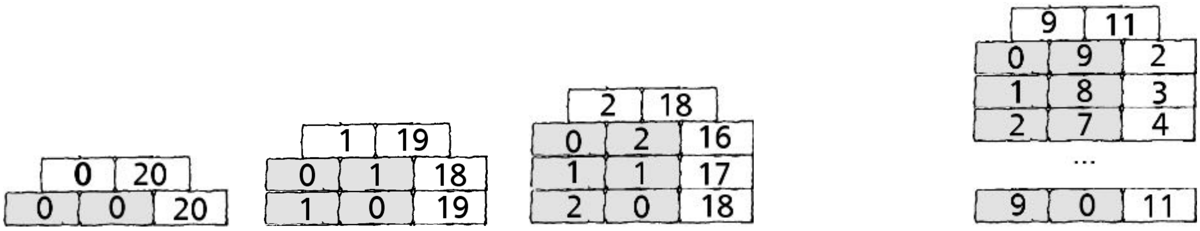
5.2.1 Forschungsauftrag 1: Decksteine treffen

Teilauftrag a:

Der Deckstein einer 3er-Mauer soll genau 20 ergeben. Findet dazu verschiedene Lösungen und berichtet in eurem Forscherheft. Wie viele könnt ihr finden?

Eine effiziente Strategie ist gewiss, die Mauer von oben nach unten zu betrachten, also vom geforderten Ziel (Deckstein 20) auszugehen. Dieses sog. ›Rückwärtsarbeiten‹ ist eine klassische heuristische Strategie beim Problemlösen (vgl. Polya 1995). Als operationalisierte Aufgabe bedeutet das, zunächst alle zweigliedrigen Zerlegungen für die Zahl im Deckstein (hier 20) zu suchen. Oder anders ausgedrückt: Wie viele Belegungen gibt es für die mittlere Reihe der 3er-Mauer?

Da der Deckstein vorgegeben ist, reicht für unsere Notation die Darstellung der Grund- und der 2. Reihe aus. Es bietet sich an, die möglichen Zerlegungen (= Belegungen der 2. Reihe) systematisch geordnet darzustellen – eine Vorgehensweise, die Vollständigkeit garantieren und das irrtümliche Vergessen einer Lösung vermeiden hilft. Betrachten wir also zunächst die Zerlegungen in der Abfolge (0|20), (1|19), (2|18), …, (9|11), (10|10), dann ergeben sich folgende Möglichkeiten für die Grundreihe (in Klammern die jeweiligen Anzahlen):



(1) (2) (3) (4) … (9) (10)

Die nächstfolgende Mauer mit der 2. Reihe (10|10) hat 11 Lösungen. Ab (11|9) verläuft die gesamte bisher betrachtete Abfolge analog, nur ›rückwärts‹. Da aber z.B. die Grundreihe (2|0|18) als verschieden von (18|0|2) gesehen werden kann, müssen diese vertauschten Grundreihen als eigenständige Lösungen gezählt werden – es sei denn, man verabredet es anders. Es gibt hier also in dieser Hinsicht kein absolutes Richtig oder Falsch, es hängt jeweils von den getroffenen Konventionen ab.

Die so nur exemplarisch und nicht vollständig zu notierende Abfolge erlaubt es dennoch, die Gesamtzahl möglicher Lösungen zu *berechnen* – ein Vorteil des Muster-Sehens!

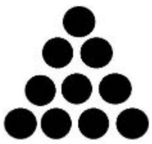
$$A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

In dieser Auflistung kann man erkennen, dass zweimal die aufeinander folgenden Zahlen von 1-10 vorkommen, plus die Mitte 11:

$$A = (1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10) + 11 + (10 + 9 + \ldots + 3 + 2 + 1)$$

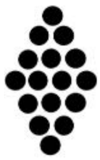
Die Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen ($1+2+3+\ldots+n$) nennt man in der Zahlentheorie Dreieckszahlen, weil sie sich (z.B. mit Wendeplättchen) als gleichseitiges Dreieck anordnen lassen (vgl. die folgenden Projekt-Logos von mathe 2000 oder TAL).

mathe 2000 (IEEM/Universität Dortmund)



4. Dreieckszahl
(D_4)

TAL (Freudenthal Inst./Universität Utrecht)



Summe aus 3. und 4. Dreieckszahl = 4. Quadratzahl
($D_3 + D_4 = Q_4$)

Dreieckszahlen kommen sehr häufig in der (Grundschul-)Mathematik als ›Hintergrundstruktur‹ vor und stellen einen Vertreter der sog. figurierten oder geometrischen Zahlen dar (vgl. Baireuther 1997; Engel 1990; Steinbring 2005; Steinweg 2001 & 2002). Der o. g. Zusammenhang erscheint z. B. als explizites Unterrichtsbeispiel im *Zahlenbuch* für die 2. Klasse (Wittmann/Müller 2004, 101), wo untersucht werden soll, warum sich aus der Summe benachbarter Dreieckszahlen stets Quadratzahlen ergeben (vgl. Krauthausen 1998, 130 f.).

In der griechischen Zahlentheorie hatten diese figurierten Zahlen eine große Bedeutung. Wohl jedem Erwachsenen (und auch bereits Grundschülern) sind die *Quadratzahlen* ein Begriff, die sich, wie der Name sagt, als quadratisches Punktmuster darstellen lassen. Sie sind ebenfalls ein Vertreter der figurierten Zahlen, aber eben beileibe nicht der einzige (vgl. Steinbring 1997, Conway 1997; Kießwetter/Rehlich 1990). Figurierte Zahlen sind insgesamt ein ertragreiches Feld für substanzielle Lernumgebungen (vgl. Krauthausen 1998, 130 ff.).

Doch zurück zum Forschungsauftrag: Einfacher als durch Aufsummieren, was bei größerem *n* recht unhandlich wird, kann man die Summe nach der Summenformel für Dreieckszahlen berechnen (zum Zustandekommen vgl. ebd.): $n \cdot (n+1) : 2$

Und da wir die Summe der Zahlen von 1–10 zweimal vorliegen haben, benötigen wir zweimal die 10. Dreieckszahl D_{10}, plus die ›Mitte‹ 11, allgemein:

$$2 \cdot \frac{10 \cdot (10+1)}{2} + 11 = 10 \cdot 11 + 11 = 11^2 = 121 \text{ 3er-Mauern mit Deckstein } 20$$

Man kann das Ganze aber auch analog zum TAL-Logo (s. vorige Seite) so deuten, dass man die Summe der 10. und 11. Dreieckszahl benötigt. Allgemein gilt dann:

$$D_{n-1} + D_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \cancel{n} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n^2$$

Und für unser Beispiel:

$$D_{10} + D_{11} = \frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{11 \cdot 12}{2} = 11 \cdot 11 = 11^2$$

Für Grundschulklassen findet sich der Zusammenhang z. B. im Aufgabenbeispiel *treppauf-treppab*, welches fortlaufend Quadratzahlen produziert :

1 + 2 + 1 =

1 + 2 + 3 + 2 + 1 =

1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 =

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =

usw.

> *Teilauftrag b:*
>
> *Probiert es auch mit 4er-Mauern und selbst gewählten Decksteinen (z.B. 50 oder 100).*

Bereits beim Teilauftrag *a* kann man sehen, dass es nicht nötig ist und auch sehr aufwändig wäre, *alle* möglichen 3er-Mauern zum Deckstein 20 explizit zu notieren. Der Teilauftrag *b* macht dies noch stärker deutlich (er fordert daher auch nur zum Finden *verschiedener* Lösungen auf), da sich bei 4er-Mauern die Anzahlen sprunghaft erhöhen.

Aber natürlich hilft die Algebraisierung der Fragestellung wieder der Lehrperson, auch für Fragen der Kinder nach anderen Decksteinen gewappnet zu sein, denn wenn sich Kinder an den 2. Teilauftrag heran machen, dann wollen sie hinterher von der Lehrperson vielleicht nicht nur wissen, wie viele Lösungen denn (theoretisch) noch fehlen würden, sondern u. U. auch, wie viele es denn bei viel größeren Zielzahlen sein würden.

Bliebe man bei 3er-Mauern und würde man hier lediglich größere Decksteine vorgeben, dann besteht das o. g. Muster natürlich fort – vorausgesetzt man hat es mit *geradzahligen* Decksteinen zu tun:

Deckstein	Mittlere Mauer M	Anzahl der Lösungen
20	**10|10**	$\mathbf{2 \cdot D_{10} + M+1 = (M+1)^2 = 11^2 = 121}$
50	**25|25**	$\mathbf{2 \cdot D_{25} + M+1 = (M+1)^2 = 26^2 = 676}$
100	**50|50**	$\mathbf{2 \cdot D_{50} + M+1 = (M+1)^2 = 51^2 = 2601}$

Überlegen Sie selbst: Wie verhält es sich, wenn als Deckstein eine *ungerade* Zahl gewählt wird?

Kann es also bei Teilauftrag *a* noch Sinn machen, die Aufforderung, *verschiedene* Lösungen zu finden, noch so auszuschöpfen, dass man (dann verabredungsgemäß beschränkt auf die natürlichen Zahlen) *alle* finden soll (s. o.), wie das bei der Erprobung einige 2. Klassen bereits erfolgreich getan haben, so ist das bei Teilauftrag *b* in der Weise weder erwartet noch sinnvoll. Hier ist bereits das Ziel der Aufgabenstellung erreicht, wenn das *prinzipielle* Muster strukturell erkannt und dargestellt, und daraus folgernd die enorm große Lösungsanzahl begründet wurde. Leistungsstarke SchülerInnen mögen aber durchaus an die Aufgabe gehen, eine allgemeine Berechnungsmöglichkeit wie etwa in obiger Tabelle zu finden.

5.2.2 Forschungsauftrag 2: Größter/kleinster Deckstein

Teilauftrag a:

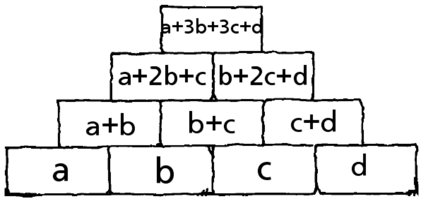
Sucht euch vier beliebige Zahlen aus. Bildet damit verschiedene Grundreihen von 4er-Mauern. Wie erhält man den größten und wie den kleinstmöglichen Deckstein?

Teilauftrag b:

Probiert es auch mit drei Zahlen in 3er-Mauern oder fünf Zahlen in 5er-Mauern.

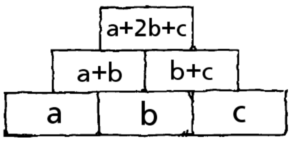
Zur *allgemeingültigen* Beantwortung der Frage bei 4er-Mauern (Teilauftrag *a*) ist es hilfreich, sich die algebraische Darstellung einer 4er-Mauer anzusehen. Da in der Grundreihe beliebige Zahlen stehen dürfen, belegen wir diese mit *a, b, c* und *d*. Das regelkonforme Berechnen der weiteren Mauernsteine führt zu einem Deckstein, der *immer* die allgemeine Form $a + 3b$

+ 3c + d hat. Bis hierher ist das schlichte Rechenarbeit. Doch nun geht es darum, den algebraischen Term zu interpretieren (eine wichtige Kompetenz, weiter reichend als die rein formalistische Beherrschung von Termumformungsregeln): Welche Informationen lassen sich daraus entnehmen? Für die vorliegende Forschungsfrage dies:

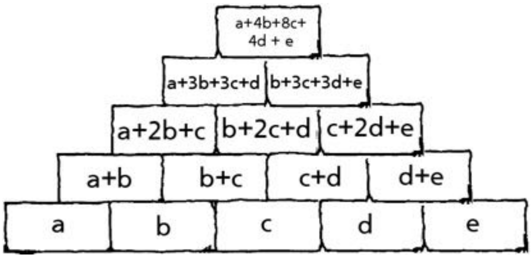


- Um in einer 4er-Mauer den größtmöglichen Deckstein zu erhalten, müssen die beiden größten der gewählten Grundreihen-Zahlen auf die Positionen *b* und *c* (egal in welcher Abfolge) platziert werden, da diese Werte *dreifach* in den Deckstein eingehen. Entsprechend gilt:
- Um in einer 4er-Mauer den kleinstmöglichen Deckstein zu erhalten, müssen die beiden kleinsten der gewählten Grundreihen-Zahlen auf die Positionen *b* und *c* (egal in welcher Abfolge) platziert werden, da diese Werte *dreifach* in den Deckstein eingehen.

Auch für spätere Forschungsaufträge greifen wir wieder auf die o. g. bzw. die folgende Darstellung zurück, weil sie auch dort Fragen beantworten können ... Doch betrachten wir hier noch das Vorgehen für den Teilauftrag *b*, und schauen wir uns dazu die allgemeine Struktur von 3er- bzw. 5er-Mauern an:



3er-Mauer



5er-Mauer

Folglich gilt:

- Um in einer 3er-Mauer den größtmöglichen Deckstein zu erhalten, muss die größte der gewählten Grundreihen-Zahlen auf die mittlere Position *b* platziert werden, da dieser Wert *doppelt* in den Deckstein eingeht. Entsprechend gilt:
- Um in einer 3er-Mauer den kleinstmöglichen Deckstein zu erhalten, muss die kleinste der gewählten Grundreihen-Zahlen auf die mittlere Position *b* platziert werden, da dieser Wert *doppelt* in den Deckstein eingeht.
- Um in einer 5er-Mauer den größtmöglichen Deckstein zu erhalten, muss die größte der gewählten Grundreihen-Zahlen auf die mittlere Position *c* platziert werden (geht *achtfach* in den Deckstein ein), die beiden nächstgrößten Zahlen müssen auf die Positionen *b* und

d (gehen *vierfach* in den Deckstein ein), und die beiden kleinsten Zahlen gehören auf die Außenpositionen *a* und *e* (gehen *einfach* in den Deckstein ein). Entsprechend gilt:

- Um in einer 5er-Mauer den kleinstmöglichen Deckstein zu erhalten, muss die kleinste der gewählten Grundreihen-Zahlen auf die mittlere Position *c* platziert werden (geht *achtfach* in den Deckstein ein), die beiden nächstkleinsten Zahlen müssen auf die Positionen *b* und *d* (gehen *vierfach* in den Deckstein ein), und die beiden größten Zahlen gehören auf die Außenpositionen *a* und *e* (gehen *einfach* in den Deckstein ein).

5.2.3 Forschungsauftrag 3: Grundsteine vergrößern/verkleinern

Teilauftrag a:
Vergrößert oder verkleinert bei 3er-Mauern einen Eckstein der Grundreihe um 1.

Teilauftrag b:
Vergrößert oder verkleinert bei 3er-Mauern den inneren Stein der Grundreihe um 1.

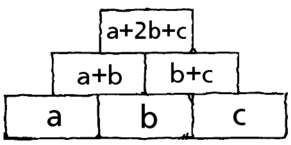
Teilauftrag c:
Vergrößert oder verkleinert bei 4er-Mauern einen Eckstein der Grundreihe um 1.

Teilauftrag d:
Vergrößert oder verkleinert bei 4er-Mauern einen inneren Stein der Grundreihe um 1.

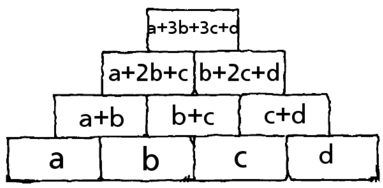
Was geschieht mit dem Deckstein? Erklärt in eurem Forscherheft, warum das so sein muss.

Bestimmte Grundsteine um (zunächst!) 1 zu vergrößern oder zu verkleinern, stellt ein klassisches operatives Vorhaben gemäß der Kurzcharakterisierung des operativen Prinzips dar – *Objekt, Operation, Wirkung* (vgl. Wittmann 1985): Auf bestimmte *Objekte* (hier: Grundreihen von Zahlenmauern) wird mehrfach eine *Operation* angewendet (hier: wiederholtes Vergrößern/Verkleinern um einen bestimmten Wert), um die daraus resultierende *Wirkung* zu beobachten und zu beschreiben (und wenn möglich auch zu begründen).

Auch bei diesem Forschungsauftrag können konkrete Beispiele belegen, was die algebraische Form der entsprechenden Zahlenmauern *allgemein* besagt:



3er-Mauern



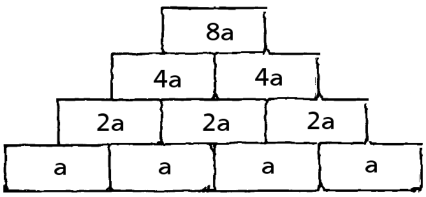
4er-Mauern

- Wird in einer 3er-Mauer ein Eckstein der Grundreihe um 1 (generell *n*) vergrößert bzw. verkleinert, dann wird auch der Deckstein um 1 (bzw. *n*) größer bzw. kleiner, da die Positionen *a* und *c* jeweils *einfach* in den Deckstein eingehen.
- Wird in einer 3er-Mauer der mittlere Stein der Grundreihe um 1 (generell *n*) vergrößert bzw. verkleinert, dann wird der Deckstein um 2 (bzw. *2n*) größer bzw. kleiner, da die Position *b doppelt* in den Deckstein eingeht.
- Wird in einer 4er-Mauer ein Eckstein der Grundreihe um 1 (generell *n*) vergrößert bzw. verkleinert, dann wird auch der Deckstein um 1 (bzw. *n*) größer bzw. kleiner, da die Positionen *a* und *c* jeweils *einfach* in den Deckstein eingehen.
- Wird in einer 4er-Mauer einer der beiden mittleren Steine der Grundreihe um 1 (generell *n*) vergrößert bzw. verkleinert, dann wird auch der Deckstein um 3 (bzw. *3n*) größer bzw. kleiner, da die Positionen *b* und *c* jeweils *dreifach* in den Deckstein eingehen.

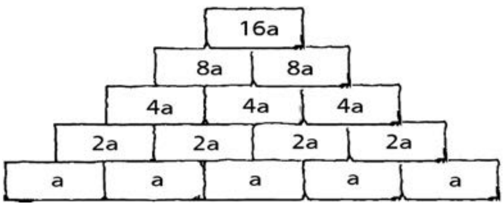
Für jede Mauerngröße lässt sich also an der algebraischen Form des Decksteins ablesen und begründen, welche Effekte operative Variationen in der Grundreihe nach sich ziehen. Wir haben hier, über die Aufgabenstellung dieses Forschungsauftrags hinaus, nicht nur die Variation um 1, sondern auch um den allgemeinen Wert *n* mit berücksichtigt, weil dieser später im Forschungsauftrag 7 relevant werden wird (s. 5.2.7; zur inhaltlich anschaulichen Erklärung vgl. 4.2.2 sowie Affolter et al. (2001), S. 158 f., als PDF auf dieser CD). Und die algebraische Form des jeweiligen Decksteins auch für größere Zahlenmauern lässt sich, wie in Abschnitt 5.1.1 gezeigt wurde, mit Hilfe der Binomialkoeffizienten ermitteln.

5.2.4 Forschungsauftrag 4: Besondere Grundsteine

> *Teilauftrag a:*
> *Untersucht 4er- u. 5er-Mauern, in deren Grundreihen immer nur gleiche Zahlen stehen.*
> *Was fällt euch auf?*



4er-Mauern



5er-Mauern

Da benachbarte identische Steine bei Summierung zu einer Verdopplung im Stein darüber führen, haben wir es von Zeile zu Zeile von unten nach oben mit einer *fortlaufenden Verdopplung* zu tun. Anders ausgedrückt: Die *Koeffizienten* in den einzelnen Zeilen entsprechen der Folge der Zweierpotenzen (vgl. 4.2.4):

Grundreihe:	2^0
2. Zeile:	2^1
3. Zeile:	2^2
4. Zeile:	2^3
…	
n. Zeile:	2^{n-1}

Teilauftrag b:
Untersucht 4er-Mauern, in deren Grundreihen nur Zahlen aus der gleichen Einmaleinsreihe (ab der 2er-Reihe) stehen.

Was fällt euch auf?

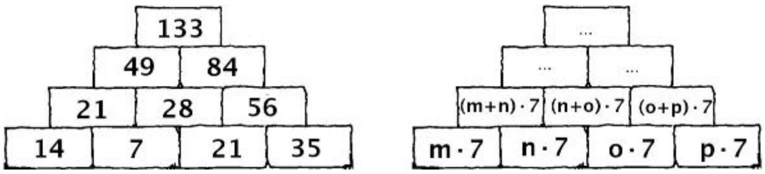
Dazu eine Vorbemerkung: Im Hinblick auf korrekte Schlussfolgerungen ist es hier wie auch an anderer Stelle sinnvoll, dass das Programm die Einhaltung der aufgabenspezifischen Vorgaben prüft, bevor weiter gearbeitet werden kann. Im Teilauftrag *(a)*, wo identische Werte gefordert sind, stellt das Programm das sicher, indem es automatisch die Werte gemäß der ersten Eingabe einsetzt. (Im 9. und 10. Forschungsauftrag, wo fortlaufende Zahlen gefordert sind, wird analog verfahren.) Beim hier vorliegenden Teilauftrag *(b)* aber ist nicht schon nach der ersten Eingabe entscheidbar, welche Einmaleinsreihe gemeint ist. Dazu bedarf es weiterer Eingaben und ggf. entscheidet es sich erst beim letzten Wert.

Es wurden nun drei *Konventionen* getroffen:

1. Für Grundreihenzahlen wird hier unter ›Einmaleinsreihe‹ die auf das Zehnfache begrenzte Vielfachenmenge verstanden, also das sog. kleine Einmaleins, wie der Begriff den Kindern im 2. Schuljahr zunächst vertraut ist.
2. Die Einer-Reihe wird hier ausgeschlossen, weil ansonsten *jede Zahl* bis 20 eingesetzt werden könnte. Das wäre zwar nicht prinzipiell abzulehnen, das Programm kann aber dann keine zuverlässige Prüfung im o. g. Sinne vornehmen. Würden z. B. bei einer intendierten 2er-Reihe die Zahlen 8, 2, 4 und (irrtümlich) 7 eingegeben, dann entspräche das nicht der Bedingung 2er-Reihe, würde aber vom Programm als ein Fall der Einer-Reihe akzeptiert. Abgesehen von diesem eher technisch bedingten Grund wird aber auch das Muster, auf das es hier ankommt, bei der Einer-Reihe weniger transparent. Zulässig einsetzbar sind also hier nur Zahlen der 2er-Reihe bis 10er-Reihe.
3. Die unter 1. genannte Beschränkung bedeutet ausdrücklich *nicht*, dass der allgemeine Begriff der Vielfachenmenge außen vorbleiben sollte – im Gegenteil: Der Forschungsauftrag ist eine gute Gelegenheit, den Unterschied zwischen den (begrenzten) Reihen des sog. kleinen Einmaleins und der (unbegrenzten) Menge der Vielfachen einer Zahl herauszuarbeiten!

Doch nun zum beobachtbaren Muster:

Stehen in einer Grundreihe ausschließlich Zahlen der gleichen Einmaleinsreihe, dann sind in der Grundreihe alle Zahlen von 1·A bis 10·A zulässig (vgl. in der folgenden Abb. das Beispiel für A = 7 = Zahlen der 7er-Reihe sowie algebraisch).



Allgemeiner: Das *A* kann bei einer 4er-Mauer jeweils mit dem Faktor *m, n, o, p, q* versehen sein, wobei diese Variablen jeweils zwischen 1 und 10 liegen müssen. Für das Aufaddieren benachbarter Steine führt das stets auf einen Term der Gestalt $m \cdot A + n \cdot A$, aus dem sich immer das *A* ausklammern lässt, zu $(m+n) \cdot A$. Das wiederum bedeutet, dass wir es stets mit einem *A-Fachen* zu tun haben, sprich: mit einem Vielfachen von *A*. Dieses Vielfache kann innerhalb oder außerhalb der kleinen Einmaleinsreihe mit *A* liegen, je nachdem, wie groß die Ausgangszahlen gewählt wurden und wie hoch die Mauer ist. Auch daraus ergibt sich die Möglichkeit, das Begriffsverständnis auf Vielfachmengen auszudifferenzieren.

D.h. zusammenfassend: Stehen in der Grundreihe ausschließlich Zahlen aus der gleichen Reihe des kleinen Einmaleins mit *A*, dann stehen auch in allen anderen Steinen stets nur Zahlen aus der gleichen Reihe des kleinen Einmaleins mit *A* (wenn das Zehnfache von *A* nirgendwo überschritten wird) bzw. allgemeiner: aus der Vielfachenmenge von *A*.

5.2.5 Forschungsauftrag 5: Steine ausgleichen

Teilauftrag a:

Berechnet eine eigene 4er-Mauer. Anschließend wird automatisch der mittlere Mauernstein um 1 vergrößert.
Welche anderen Steine müsst ihr nun verändern, damit alle Rechnungen in der Mauer wieder stimmen?

Katja sagt: »Da gibt es aber verschiedene Möglichkeiten.« – Könnt ihr Katja helfen?

Gemäß der vernetzten Abhängigkeitsbeziehungen aller Steine einer Zahlenmauer hat die Veränderung eines einzelnen Steines, v. a. wie hier des Mittelsteines, ganz erhebliche ›Fernwirkungen‹. Es ist nicht möglich, allein durch Angleichen eines einzigen Wertes die Störung zu reparieren, weil durch dieses Angleichen wiederum weitere Abhängigkeitsverhältnisse tangiert werden.

Und in der Tat ist Katjas Behauptung korrekt, es gibt hier sehr viele Möglichkeiten. Weit stärker als bei anderen Forschungsaufträgen ist also hier tatsächlich das Probieren erforderlich. Und dass das Probieren hier durchaus normal ist und keinen Grund zur Verzweiflung darstellt, sollte den Lernenden als Botschaft auch vermittelt werden. Es *kann* hier nicht in der

gleichen Weise so systematisch vorgegangen werden wie etwa bei einigen anderen Forschungsaufträgen mit klaren Fallunterscheidungen oder sukzessiven Eingrenzungen. Hier soll man sich durch diverse Versuche ein Gefühl für das Verhalten der Struktur aneignen.

Noch zugespitzter stellt sich das Problem dann im Teilauftrag *(b)* dar, wo nicht nur die Mauer in sich stimmig gemacht werden soll, sondern die zusätzliche Bedingung gefordert wird, dass dabei der Deckstein gleichwohl der alte bleiben soll.

> *Teilauftrag b:*
>
> *Könnt ihr die Steine auch so verändern, dass der Deckstein trotzdem der gleiche bleibt wie zuvor bei der Ausgangsmauer?*

Es lässt sich hier keine einfache algebraische Lösung für die Anzahl von Lösungen angeben. Von daher stehen das strategische Vorgehen und das Beobachten der Effekte gewisser Schiebe-Aktionen bzw. Veränderungen einzelner Steine im Vordergrund und nicht das Auffinden ›aller‹ Lösungen.

5.2.6 Forschungsauftrag 6: Gerade und ungerade Decksteine

Die Erkundungen der einzelnen Teilaufträge werden durch ›virtuelle‹ Kinder und ihre Behauptungen begleitet. Diese gilt es zu überprüfen, wobei mit folgenden Fällen gerechnet werden muss:

- Die Behauptung ist zutreffend und vollständig und zu verifizieren (ihre Richtigkeit zu begründen).
- Die Behauptung ist unzutreffend und – ggf. reicht dazu ein Gegenbeispiel – zu falsifizieren (ihre Falschheit zu begründen).
- Die Behauptung ist zutreffend, aber unvollständig und zu verifizieren sowie zu komplettieren.

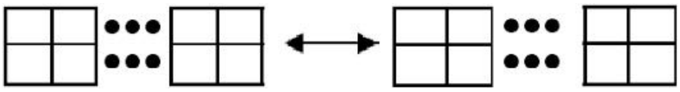
Dieses Spektrum der virtuellen Behauptungen mit der zunächst bestehenden Unklarheit, welcher Fall denn nun konret vorliegt, ist beabsichtigt, weil eine kritische Fragehaltung auf der Basis *eigener* Überzeugungen statt voreilige Gutgläubigkeit gefördert werden soll. Es sollen also auch fragwürdige Gewohnheiten auf den Kopf gestellt werden wie z. B.:

- Wenn die Lehrperson nach einer weiteren Lösung fragt, dann *gibt* es auch definitiv eine solche (denn sonst würde sie nicht fragen).
- Wenn die Lehrperson noch einmal nachfragt, dann muss etwas falsch gewesen sein (denn sonst hätte sie es akzeptiert und wäre weiter gegangen).

Teilauftrag a:
In einer 3er-Mauer soll im Deckstein eine gerade Zahl stehen.
Maike sagt: »Dann müssen alle Grundsteine gerade sein.« Hat Maike Recht?
Mehmet vermutet: »Genau ein Grundstein darf auch ungerade sein. Ich bin nur noch nicht sicher, welcher.« Könnt ihr ihm helfen?

Maikes Behauptung, dass dann *alle* Grundsteine gerade sein müssen, lässt sich an konkreten Zahlenbeispielen, aber auch allgemeingültig zeigen (s. u.). Dieser Forschungsauftrag ist also auch dazu geeignet, die Begriffsbildung bzgl. gerader und ungerader Zahlen zu stabilisieren und zu fördern. Ein entsprechendes Verständnis sollte nicht nur auf der formalen Ebene vorhanden sein (»Gerade Zahlen kann man durch 2 teilen, ungerade nicht.«), sondern auch erklärt bzw. begründet werden können. Dazu ist folgender mathematische Hintergrund relevant:

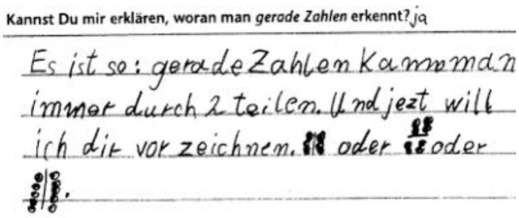
Die Summe zweier gerader Zahlen ergibt stets eine gerade Zahl. Diese elementare Regel lässt sich bereits auf dem Niveau von Erstklässlern inhaltlich-anschaulich begründen, so dass die Kinder es nicht nur ›glauben‹ müssen oder an endlich vielen konkreten Beispielen zutreffen sehen: Gerade Zahlen lassen sich stets als Doppelreihe darstellen (s. folgende Abb. sowie die Abb. von Melanie & Angelina in 4.2.6). Und wenn man zwei solcher Doppelreihen zusammenschiebt (addiert), dann ergibt sich zwangsläufig wieder eine Doppelreihe, also eine gerade Zahl:



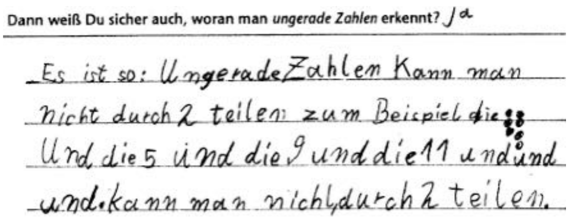
Zeilenlänge m Zeilenlänge n

$$2 \cdot m + 2 \cdot n = 2 \cdot (m + n)$$

Die Punkte zwischen den beiden Doppelreihen deuten an, dass beide Zahlen beliebig groß sein dürfen (die Doppelreihe also beliebig lang), es ändert nichts am genannten Sachverhalt. Durch den Beleg der Fortsetzbarkeit ist dieser inhaltlich-anschauliche Beweis auch allgemeingültig (vgl. Krauthausen 2001). Er entspricht völlig dem entsprechenden algebraischen Beweis unterhalb der Skizze, er erfolgt lediglich in einer anderen ›Sprache‹: Zwei Reihen (Doppelreihe) der Länge m plus zwei Reihen (Doppelreihe) der Länge n ergibt wieder eine Doppelreihe (also eine gerade Zahl!), und zwar der Länge $m+n$. Wenn die Kinder gleich von der 1. Klasse an Wendeplättchen, Punktmuster, Cuisenaire-Stäbe o. Ä. nicht nur als Rechenhilfsmittel, sondern auch in ihrer Funktion als *Argumentations- und Beweismittel* kennen lernen (vgl. Krauthausen/Scherer 2003, 226 ff.), dann wird das inhaltlich-anschauliche Begründen sehr bald ein mächtiges Werkzeug des Mathematik-Treibens, wie es das wie folgende Dokument einer Zweitklässlerin zeigt:

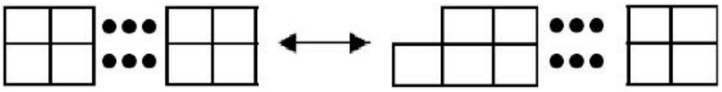

Kannst Du mir erklären, woran man *gerade Zahlen* erkennt? ja

Es ist so: gerade Zahlen Kann man immer durch 2 teilen. Und jezt will ich dir vor zeichnen. oder oder


Dann weiß Du sicher auch, woran man *ungerade Zahlen* erkennt? Ja

Es ist so: Ungerade Zahlen Kann man nicht durch 2 teilen zum Beispiel die Und die 5 und die 9 und die 11 und und und. kann man nicht durch 2 teilen.

Analog gilt: *Die Addition einer ungeraden und einer geraden Zahl ergibt stets eine ungerade Zahl*, weil an der Nahtstelle eine Lücke bleibt:

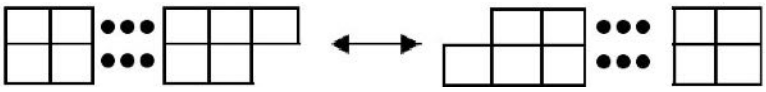


$$2m \quad + \quad 2n + 1$$

$$= 2n + 2m + 1 = 2 \cdot (m+n) + 1 = 2r + 1$$

Also: Eine Doppelreihe (Länge r = m+n) plus eine ›Nase‹.

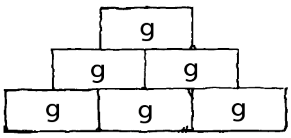
Analog gilt: *Die Addition zweier ungerader Zahlen ergibt stets eine gerade Zahl:*



$$2n + 1 \quad + \quad 2m + 1$$

$$= 2n + 2m + 2 = 2 \cdot (m+n+1)$$

Also: Eine Doppelreihe (der Länge m+n+1)



Mit diesem Vorverständnis lässt sich nun Maikes Behauptung (s.o. Forschungsauftrag), der Deckstein würde gerade, wenn alle Grundsteine gerade wären, in einer allgemeingültigen Mauer (mit *g* für gerade) überprüfen und verifizieren, denn sie hat erst einmal Recht.

Allerdings stellt ihre Behauptung noch nicht die ganze Wahrheit dar. Es gibt noch eine andere Konstellation, die ebenfalls zu einem geraden Deckstein führt, nämlich die Grundreihe [g|u|g]. Sie führt in der 2. Reihe zu zwei ungeraden Zahlen, deren Addition wiederum im Deckstein zu der geforderten geraden Zahl führt. Und das ist gerade auch jener Fall, der Mehmets Vermutung konkretisiert: Ja, *ein* Grundstein darf auch ungerade sein, es muss dann aber zwingend der *mittlere* Stein der 3er-Mauer sein!

Aber auch mit den Behauptungen von Maike und Mehmet ist der Teilauftrag noch nicht ausgeschöpft: Diese virtuellen Argumentatoren sollen ja dazu anregen und ermutigen – hier wie in anderen Fällen – den *kompletten* Lösungsraum zu untersuchen. Und so gibt es im vorliegenden Fall noch zwei weitere prinzipielle Grundreihen, die beide ebenfalls die geforderte Bedingung nach einem geraden Deckstein erfüllen. Es sind dies:

- *Alle* Zahlen der Grundreihe ungerade: Das führt in der 2. Zeile zu ausschließlich geraden Zahlen und das wiederum zu einem geraden Deckstein.
- Zwei Zahlen, und zwar genau die beiden Ecksteine sind ungerade: Das führt in der 2. Zeile zu zwei ungeraden Zahlen, die wiederum einen geraden Deckstein ergeben.

> *Teilauftrag b:*
> *In einer 3er-Mauer soll im Deckstein eine ungerade Zahl stehen.*
> *Lisa meint: »Genau ein Grundstein darf ungerade sein, egal welcher.« Hat Lisa Recht?*
> *Linus behauptet: »Alle Grundsteine müssen ungerade sein.« Überprüft seine Behauptung.*

Lisas Behauptung, dass *ein beliebiger* Grundstein ungerade sein darf, ist falsch, denn es muss dann zwingend ein Eckstein sein, denn wie wir oben gesehen haben, führt die Grundreihe [g|u|g] zu einem geraden Deckstein.

Und wenn Linus behauptet, dass auch drei ungerade Grundsteine zu einem ungeraden Deckstein führen würden, dann ist dies eine klare Falschaussage (vgl. ebenfalls Teilauftrag *(a)*).

Bei 3er-Mauern gibt es für ungerade Decksteine nur den einen Fall, dass einer der beiden Ecksteine ungerade sein muss.

> *Teilauftrag c:*
> *In einer 4er-Mauer soll im Deckstein eine gerade Zahl stehen.*
> *Rosalie behauptet: »Das geht nur, wenn alle Grundsteine gerade sind.« Hat Rosalie Recht?*
> *Marco vermutet, dass es auch anders geht. Überprüft seine Vermutung.*

Rosalie behauptet, dass dazu *alle* Grundsteine gerade sein müssen. Diese Behauptung ist, wie sich an der Grundreihe [g|g|g|g] leicht nachvollziehen lässt, richtig – allerdings nicht erschöpfend, da es noch weitere Fälle gibt. Auf diese zielt Marcos Vermutung. Insgesamt erfüllen folgende Fälle die Bedingung:

- *Alle* Grundsteine gerade (Rosalies Behauptung): [g|g|g|g]
- *Alle* Grundsteine ungerade: [u|u|u|u]
- *Genau zwei* beliebige Grundsteine ungerade: [u|g|u|g] oder [g|u|g|u] oder [g|u|u|g] oder [u|g|g|u] oder [g|g|u|u] oder [u|u|g|g].

> *Teilauftrag d:*
> *In einer 4er-Mauer soll im Deckstein eine ungerade Zahl stehen.*

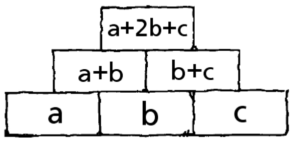
Jens meint: »Wenn nur die beiden inneren Grundsteine ungerade sind, dann geht es.« Hat Jens Recht?
Tanja behauptet: »Ein ungerader Grundsteine genügt, egal welcher.« Überprüft Tanjas Behauptung.

Sind die beiden inneren Grundsteine ungerade, dann führt dies, anders als Jens behauptet, zu einem geraden Deckstein. Tanja hingegen hat Recht, was den Fall *eines* ungeraden Grundsteins betrifft. (Finden Sie die dazugehörenden Möglichkeiten für die Grundreihe?).

Es gibt allerdings auch noch den Fall mit *drei* ungeraden Grundsteinen. Suchen Sie auch hier selbst die möglichen Verteilungen! Und überprüfen Sie, dass es mit *zwei* ungeraden wirklich nicht geht, auch wenn man die Bedingung von Jens außer Acht lässt …

5.2.7 Forschungsauftrag 7: Neue Decksteine

Teilauftrag a:
Berechnet zunächst eine eigene 3er-Mauer. Verändert die Grundreihe jetzt so, dass der Deckstein um 7 größer wird.
Gibt es dazu verschiedene Möglichkeiten? Könnt ihr es in möglichst wenigen Versuchen schaffen?
Reni kennt einen Trick: Sie schafft es sofort im 1. Versuch, die Grundreihe passend zu verändern. Findet ihr auch den Trick?



Dieser Forschungsauftrag greift auf Erfahrungen zurück, die im Forschungsauftrag 3 gesammelt werden konnten. Dort wurden die Effekte operativer Variationen diverser Grundsteine durch das Vergrößern bzw. Verkleinern um 1 erkundet (vgl. 4.2.1), wobei aber die allgemeine Variation um *n* dort auch schon in den Blick genommen wurde. Basierend auf der abgebildeten allgemeinen Form einer 3er-Mauer haben wir dort gesehen:

- Wird in einer 3er-Mauer ein Eckstein der Grundreihe um *n* vergrößert bzw. verkleinert, dann wird auch der Deckstein um *n* größer bzw. kleiner, da die Positionen *a* und *c* jeweils *einfach* in den Deckstein eingehen.
- Wird in einer 3er-Mauer der mittlere Stein der Grundreihe um *n* vergrößert bzw. verkleinert, dann wird der Deckstein um *2n* größer bzw. kleiner, da die Position *b doppelt* in den Deckstein eingeht.

Diese Gegebenheiten kann man nun hier nutzen, um sich an die geforderte Veränderung um +7 bzw. -10 ›heranzuschleichen‹, also z.B. durch siebenmaliges Erhöhen eines Ecksteine um 1 (die behutsame Strategie) oder durch gleichzeitiges Erhöhen des Mittelsteins um 3 und eines Ecksteins um 1 usw. Hier können alle Kinder einen oder mehrere Wege finden.

> *Der ›geheimnisvolle‹ Trick, den Reni bzw. Methim andeuten, soll natürlich nicht auf der bloßen Trick-Ebene stehen bleiben, denn die Kinder sollen die Mathematik durchschauen und sie nicht mit Tricks im Sinne von unerklärbaren Zaubereien assoziieren!*

Was Reni oder Methim also im Hinterkopf haben, lässt sich als eine weiter entwickelte Strategie des schrittweisen Annähern (operatives Verändern) aufklären: Ihr Vorgehen basiert auf dem Vorwissen um die o. g. (und in Forschungsauftrag 3 zu erkundenden) Effekte der Veränderungen gewisser Grundsteine. Die geforderte Vergrößerung bzw. Verkleinerung in *einem* Schritt zu vollziehen, läuft auf die Frage hinaus, wie sich

- eine Vergrößerung des Decksteins um 7 aus 1er- und/oder 2er-Schritten zusammenbauen lässt (Teilauftrag *a*),
- eine Verkleinerung des Decksteins um 10 aus 1er- und/oder 2er-Schritten zusammenbauen lässt (Teilauftrag *b*).

Wir deuten hier nur einige Möglichkeiten an, denn es gibt derer ja eine Fülle. Für die Notation benutzen wir die aus der o. g. allgemeinen Mauerndarstellung gewohnten Bezeichnungen (für den mittleren Grundstein = *b* und die beiden Ecksteine = *a, c*). Für Teilauftrag *(a)* gibt es also z.B. folgende Optionen:

- *b*: ±0 und gleichzeitig *a*: +4 und *c*: +3 (oder umgekehrt – sowie alle zweigliedrigen Zerlegungen der 7 gemäß Konstanzsatz)
- *b*: +1 und gleichzeitig *a*: +3 und *c*: +2 (oder umgekehrt – sowie …)
- *b*: +2 und gleichzeitig *a*: +2 und *c*: +1 (oder umgekehrt – sowie …)
- *b*: +3 und gleichzeitig *a* oder *c*: +1
- *b*: +4 und gleichzeitig *a* oder *c*: -1

Entsprechend, und das macht die Vielzahl der Lösungsmöglichkeiten aus, kann man *b* auch verkleinern und trotzdem durch entsprechende Erhöhungen von *a* und/oder *c* unter dem Strich auf eine Vergrößerung des Decksteins um 7 kommen. Entsprechendes gilt für die Verkleinerung um 10:

> *Teilauftrag b:*
> *Berechnet zunächst eine eigene 4er-Mauer. Verändert die Grundreihe jetzt so, dass der Deckstein um 10 kleiner wird.*
> *Gibt es dazu verschiedene Möglichkeiten? Könnt ihr es in möglichst wenigen Versuchen schaffen?*
> *Methim hat einen Trick: Er schafft es sofort im 1. Versuch, die Grundreihe passend zu verändern. Vergleicht mit dem Trick aus Aufgabe a.*

Zu diesem Teilauftrag *(b)* ist jedoch noch eine zusätzliche Kommentierung erforderlich: Je nachdem, wie die Grundreihe konstruiert wird, sind gewisse Veränderungen u. U. nicht mehr möglich – jedenfalls nicht mehr im Bereich der *natürlichen Zahlen*. Ein Eckstein kleiner als 10 erlaubt eben keine Verkleinerung um 10, was ja auf den Deckstein den gewünschten Effekt haben würde. Man kann dem auf zweierlei Weise begegnen:

a) Man verabredet als spezielle Rahmenbedingung, dass in der Grundreihe nur Zahlen größer als 10 vorkommen dürfen.

b) Man öffnet den Zahlbereich der natürlichen Zahlen auf den Zahlbereich der *ganzen Zahlen*.

Die Vorgehensweise *a)* entspricht der Tatsache, dass häufig in der Mathematik bestimmte Geltungsbereiche oder Rahmenbedingungen verabredet werden. Im ZAHLENFORSCHER wurde aber von dieser Möglichkeit nach längern Diskussionen kein Gebrauch gemacht. Wir haben uns für die unter *b)* beschriebene Praxis entschieden, und zwar aus folgenden Gründen:

- Selbst bei Grundsteinen größer als 10 können u. U. Veränderungen erforderlich werden, die auch dann nicht weiter führen.
- Das Öffnen in den Zahlbereich der ganzen Zahlen wird der Tatsache gerecht, dass die Forschungsaufträge auch für die Jahrgangsstufen 5 und 6 sinnvoll und empfehlenswert sind, wo die negativen Zahlen ja eingeführt werden.
- In einigen der Offline-Erprobungen dieses Forschungsauftrags haben auch manche Grundschulkinder spontan zu negativen Zahlen gegriffen und ganz selbstverständlich mit ihnen argumentiert.
- Die gewählte Praxis lässt trotzdem die Variante a) offen.

Es sei daran erinnert:

> Im Modus *Selbst wählen* und im Modus *Forschen* arbeitet der ZAHLENFORSCHER nicht nur im Bereich der *natürlichen* Zahlen (Ausnahmen: Forschungsaufträge 1a, 8 und 11b), sondern lässt auch den Bereich der *ganzen* (also auch negative) Zahlen zu. NutzerInnen, die (offiziell) noch keine negativen Zahlen kennen gelernt haben, werden bei der Arbeit mit dem ZAHLENFORSCHER keinerlei Unterschied bemerken, solange sie nicht von sich aus negative Zahlen benutzen. Für all jene aber, die mit negativen Zahlen bereits etwas verbinden können, erlaubt der ZAHLENFORSCHER auch die Nutzung dieses Zahlbereichs. Und noch mehr: Das Format der Zahlenmauern kann sich als ein substanzielles Umfeld zur Übung des Rechnens im Bereich der ganzen Zahlen erweisen, weil dieses Üben durch die hinterlegten Forschungsaufträge nicht auf die rein formalistische Berechnung beschränkt bleibt, sondern durch den genannten Kontext *Sinn macht*.

5.2.8 Forschungsauftrag 8: Eine Mauer – viele Grundreihen

> *Teilauftrag a:*
> *In einer 4er-Mauer ist die komplette 2. Reihe von unten vorgegeben. Für die Grundreihe gibt es hier mehrere Lösungen. Findet ihr sie alle?*

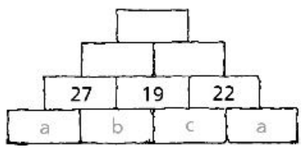
Auch bei diesem Auftrag lässt sich durch (systematisches) Probieren bald zumindest eine, aber leicht auch mehrere Lösungen finden. »Denn nur der 1. Versuch muss wirklich gerechnet werden. Der Rest ergibt sich aus dem Konstanzsatz: Verkleinerung der 1. Zahl bewirkt gleiche Verkleinerung der 3. Zahl und entsprechende Vergrößerung der 2. und 4. Zahl« (Wittmann/Müller 1992, 42). Es gibt jeweils ›natürliche Grenzen‹, solange man sich im Bereich der natürlichen Zahlen bewegt (daher ist dieser Forschungsauftrag programmintern auch auf den Bereich IN begrenzt), innerhalb derer man nach Lösungen suchen kann. Entsprechend verläuft dann über diese bestehenden Begrenzungen auch die Begründung, warum es nicht mehr Lösungen geben *kann*.

Da die (vorzugebende) 2. Reihe der Mauer nicht beliebig belegt werden darf, sondern gewissen Bedingungen genügen muss, um zu einem konsistenten Ergebnis zu führen, stammen die Beispiele aus einem didaktisch kontrollierten Pool. Dieser führt entweder zu Aufgaben mit vergleichsweise wenigen Lösungen (min. 4), so dass das Vorgehen rasch zum Ziel führt, aber auch mit mehr Lösungen (max. 14). Wer über den Pool hinaus noch weitere individuelle Mauern zu diesem Forschungsauftrag konstruieren möchte, dem bietet dazu der Modus *Selbst wählen* Gelegenheit.

> *Teilauftrag b:*
> *In einer 4er-Mauer ist die komplette 2. Reihe von unten vorgegeben. Sucht jetzt eine Lösung mit gleichen Ecksteinen in der Grundreihe.*

Auch wenn zusätzlich identische Ecksteine in der Grundreihe gefordert sind (s. folgende Abb.), führt systematisches Probieren vor dem Hintergrund des Konstanzsatzes zum Ziel. Das bedeutet, dass sich jede Veränderung an einem Stein der Grundreihe als gegensinnige Veränderung an seinem Nachbarstein auswirkt, da der darüber liegende Stein der 2. Reihe vorgegeben, also konstant bleibt. Dieser systematische Zusammenhang (Konstanz der Addition) wird – bewusst oder unbewusst – auch von Kindern strategisch ausgenutzt (vgl. 4.1.3).

Das Ganze lässt sich auch wieder algebraisch auflösen, und zwar indem für die Beziehungen in Grund- und 2. Reihe drei Gleichungen aufgestellt werden, deren Variablen sich durch Termumformungen berechnen lassen:



(1) $a + b = 27$

(2) $a + c = 22$ => $a = 22 - c$ (4)

(3) $b + c = 19$

Einsetzen von Gleichung (4) in Gleichung (1) ergibt: $22 - c + b = 27$

$\Rightarrow\ b - c = 5$ (5)

Aus Gleichung (5) und Gleichung (3) folgt:

$b - c + 14 = 19 = b + c \quad \Rightarrow \quad b - c + 14 = b + c \quad \Rightarrow \quad 14 = 2c \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = 7}}$

Mit der Festlegung eines Steines der Grundreihe sind alle anderen aufgrund der vorgegebenen 2. Reihe ebenfalls festgelegt und sukzessive zu errechnen.

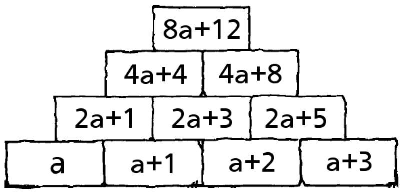
Beim operativen Variieren eines Steins der Grundreihe wird – v. a. nach entsprechender Sortierung der Versuche – erkennbar, wie die Konstanz der Summe durch das gegensinnige Verändern entsprechender Zahlenpaare gewährleistet bzw. genutzt wird und welche Abhängigkeiten zwischen Basissteinen und zu jenen der 2. Mauernreihe bestehen. Folgende Phänomene lassen sich z. B. beobachten (vgl. auch 4.1.3):

- Bei allen Versuchen für die Grundreihe ist die Summe der vier Basissteine gleich (weil ja auf der Basis des Konstanzsatzes bzw. des gegensinnigen Veränderns gearbeitet wird). Diese Tatsache eignet sich auch als eine Kontrollmöglichkeit für rechnerische Korrektheit.
- Nicht identische Ecksteine der Grundreihe ergeben stets die gleiche Summe – ebenfalls eine Kontrollmöglichkeit. Denn da die 2. Mauernreihe unverändert bleiben muss, zieht eine Vergrößerung des linken Ecksteins *a* eine Verkleinerung (= gegensinnige Veränderung) des Nachbarsteins *b* nach sich, dieses wiederum eine Vergrößerung des Nachbarsteins *c*, und dieses wiederum eine Verkleinerung des rechten Ecksteins – jeweils selbstverständlich um den gleichen Betrag. Kurz: Aus der Grundreihe [a|b|c|d] wird [a+x|b–x|c+x|d–x]. Daraus folgt für die Summe der Ecksteine: $(a+x)+(d-x)=a+d$, und damit stets gleich, unabhängig von x.
- Die Summe zweier nicht identischer Ecksteine dividiert durch 2 (also das arithmetische Mittel) ergibt den Wert, der für *identische* Ecksteine gebraucht wird.
- Die Summe der Ecksteine der 2. Mauernreihe ist gleich der Summe aller Basissteine. Machen Sie sich das an einer Leermauer algebraisch klar.

Dieser Forschungsauftrag lässt sich übrigens unaufwändig variieren, indem die Bedingung der *festgelegten 2. Reihe* aufgegeben wird und nun der *Deckstein* gleich bleiben soll: Hier gibt es dann mehrere Lösungen bei ein und denselben identischen Ecksteinen (Wie viele jeweils?), was sich über den Konstanzsatz der Addition erklären lässt (vgl. Affolter et al. 2001, 160, als PDF auf dieser CD).

5.2.9 Forschungsauftrag 9: Aufeinander folgende Grundsteine

> *Teilauftrag a:*
> *Leonid behauptet: »Ich kann vier aufeinander folgende Zahlen der Reihe nach in die Grundreihe einer 4er-Mauer eintragen, und als Deckstein erhalte ich genau 100!« Hat Leonid Recht?*



Aufeinander folgenden Zahlen meint: gemäß ihrer Abfolge in der Zählreihe (also Abstand 1, kein schrittweises Zählen mit anderen Schrittweiten). Ob Leonid im Teilauftrag *(a)* Recht hat, lässt sich durch (mehr oder weniger systematisches) Probieren und Annähern herausfinden. Schneller geht es erneut mit der algebraischen Darstellung der 4er-Mauer. Diese wird nun in der Grundreihe entsprechend der Forderung nach *aufeinander folgenden* Zahlen gefüllt (s. Abb.).

Man erkennt, dass unter dieser Spezialbedingung der Deckstein stets die allgemeine Form $8a+12$ hat. Als weitere Forderung sieht der Forschungsauftrag vor, dass der Deckstein genau 100 sein soll. Also muss für eine Lösung gelten: $8a + 12 = 100$. Durch Umformen dieser Gleichung ergibt sich: $8a = 88$ und daraus folgt $a = 11$.

Ergebnis: Leonid hat Recht, denn wenn der linke Eckstein der Grundreihe gleich *11* gesetzt wird, ergibt sich im Deckstein genau *100*.

In der allgemeinen Form $8a+12$ ist übrigens auch die Verwandtschaft dieses Forschungsauftrags zu jenem unter Nr. 3 zu erkennen (Grundsteine vergrößern/verkleinern; vgl. 5.2.3): Dort wurde gezeigt, dass die Veränderung eines Ecksteins (bei 4er-Mauern) den Deckstein um ±1 verändert, jene eines Innensteins um jeweils ±3. Geht man nun bei den vorliegenden Grundreihen aus aufeinander folgenden Zahlen von einem beliebigen Beispiel aus – z. B. [3|4|5|6] – und erhöht dann den Eckstein *a* um 1, dann erhält man die Grundreihe [4|5|6|7]. Der Deckstein dieser Mauer ist um 8 größer als bei der Ausgangsmauer, wobei sich diese 8 zusammensetzt aus den Teilveränderungen 1+3+3+1: Denn *jeder* der Grundsteine ist im Vergleich zur Ausgangsmauer um 1 vergrößert worden, was gemäß Forschungsauftrag 3 für jeden Eckstein +1 und für jeden Innenstein +3 bedeutet. So also begründet sich, warum bei Zahlenmauern mit aufeinander folgenden Zahlen in der Grundreihe *a)* nicht jede beliebige Zahl als Deckstein erzielt werden kann (in IN) und warum *b)* die Veränderungen im Deckstein um eine ganz bestimmte konstante Schrittweite (hier 8) erfolgt. Letzteres wiederum wird für die Argumentation im folgenden Forschungsauftrag 10 noch hilfreich werden …

> *Teilauftrag b:*
> *Carsten glaubt: »Mit fünf aufeinander folgenden Zahlen (der Reihe nach) in einer 5er-Mauer kann man den Deckstein 100 nicht erreichen!« Hat Carsten Recht?*

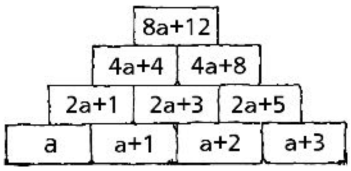
Analog lässt sich im Teilauftrag *(b)* die Behauptung Carstens bestätigen: Der Deckstein einer 5er-Mauer mit aufeinander folgenden Zahlen in der Grundreihe hat stets die allgemeine Form *16a+32* (prüfen Sie das für sich nach). D.h.: $16a + 32 = 100 \;\; => \;\; 16a = 68 \;\; => \;\; a = 4{,}25$. Damit kommt keine natürliche Zahl als Lösung in Frage (und auch keine ganze Zahl).

Sieht es anders aus, wenn man zwar aufeinander folgende Zahlen benutzt, diese aber in *beliebiger* Reihenfolge in die Grundreihe einsetzen darf?

5.2.10 Forschungsauftrag 10: Wie viele Mauern ...?

> *Teilauftrag a:*
> *Findet alle 4er-Mauern, in deren Grundreihe aufeinander folgende Zahlen (der Reihe nach) stehen und deren Decksteine zwischen 35 und 100 liegen. Wie viele findet ihr?*

Auch diesem Auftrag liegt die Vorbedingung zugrunde, dass die Grundreihe aufeinander folgende Zahlen in ihrer Zählabfolge beinhaltet. Die empirische Suche nach Lösungen würde sich hier recht aufwändig gestalten, v. a. wenn man in seinen gewählten Beispielen kein Muster erkennt. Daher benutzen wir die gleiche allgemeine Mauern-Darstellung wie im vorangegangenen Forschungsauftrag.



Demzufolge hat der Deckstein, wie wir gesehen haben, stets die Form *8a+12*. Er darf hier maximal 100 erreichen und muss minimal 35 sein. Daher versuchen wir zunächst herauszufinden, welches denn die erste und welches die letzte Zahlenmauer ist, die diesen Bedingungen gerecht wird.

- *Größtmögliche* Mauer: $8a + 12 = 100 \;\; => \;\; 8a = 88 \;\; => \;\; a_{max} = 11 \;\; =>$ Der größtmögliche linke Eckstein der Grundreihe ist 11, und er führt zum größtmöglichen Deckstein $D_{max} = 100.$
- *Kleinstmögliche* Mauer: $8a + 12 = 35 \;\; => \;\; 8a = 23 \;\; => \;\; a = 2{,}8 \;\; => \;\; a_{min} = 3 \;\; =>$ Der kleinstmögliche linke Eckstein der Grundreihe ist also 3, und er führt zum kleinstmöglichen Deckstein $D_{min} = 36.$

> *Teilauftrag b:*
> *Elmar kennt einen Trick: »Ich kann herausfinden, ohne die Mauern alle auszurechnen!« Was macht Elmar wohl?*

Die Frage nach der sich daraus ergebenden *Anzahl* lässt sich auf zwei Weisen beantworten: Entweder durch Bildung der Differenz des größten und kleinsten Ecksteins oder durch die

Frage, wie viele 8er-Schritte zwischen dem kleinsten und größten Deckstein möglich sind, denn – wie auch die allgemeine Form des Decksteins besagt – gehen diese ja in 8er-Schritten voran, weil jede Vergrößerung des Ecksteins *a* um 1, den Deckstein um 8 vergrößert! Das wird Elmar erkannt haben, so dass er den Rechenaufwand reduzierten kann.

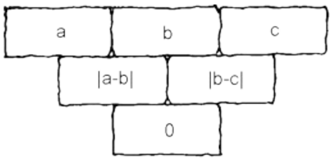
In beiden Fällen der Anzahlberechnung gilt es aber darauf zu achten, dass man keine Lösung vergisst: Denn wenn man im 1. Fall von 11 (= maximaler Eckstein) die 3 subtrahiert (als minimaler Eckstein), würde man die Lösung 3 mit wegnehmen! Ein bekanntes Problem beim Rechnen mit Nummern, angesichts dessen auch mancher Erwachsene immer wieder unsicher wird. (Häufig auch Journalisten: »Die Kalendermacher von *Pirelli* demonstrieren ihre Rechenschwäche aufwändig mit dem Titel des luxuriösen Sammelbandes ›Die kompletten Pirelli-Kalender aus 40 Jahren in einem Band, 1964–2004‹«; Ziegler 2005, 35; vgl. auch Spiegel 1989.) Daraus folgt für beide Vorgehensweisen:

$a_{max} - a_{min} = 11 - 3 = 8 \Rightarrow$ *9 Lösungen oder*

$D_{max} - D_{min} = (100 - 36) : 8 = 64 : 8 = 8 \Rightarrow$ *9 Lösungen*

Mit diesen Einsichten können Sie selbstständig auch andere Intervalle festlegen, falls Sie gezielt eine bestimmte Anzahl von Lösungen für Ihre Schülerinnen und Schüler vorsehen möchten.

5.2.11 Forschungsauftrag 11: Nullmauern



Dieser Auftrag fällt insofern aus dem Rahmen der anderen, weil ihm eine *variierte Regel* zugrunde liegt (nur dies soll durch die andere Farbgebung auf der Pinnwand ausgedrückt werden, nicht etwa ein besonderer Schwierigkeitsgrad!): Statt benachbarte Steine zu addieren und ihre Summe jeweils in den darüber liegenden Stein zu notieren, soll nun die *Differenz* berechnet und in den darunter liegenden Stein geschrieben werden (genauer: der Absolutbetrag der Differenz, also unter Vernachlässigung der Vorzeichen), man kann auch sagen: ihr Unterschied (vgl. Pinel 1990, Krauthausen 2006a/b). Das heißt, die Kinder können die beiden Zahlen zum Berechnen des Unterschieds jeweils so tauschen (im Kopf, nicht beim Notieren in der Zahlenmauer!), dass stets die größere Zahl vorne steht.

Dieser Auftrag wurde vielfach in den Jahrgangsstufen 2–5 sowie mit Studierenden erprobt, und er hat sich unter allen Forschungsaufträgen als ›heimlicher Renner‹ und Lieblingsauftrag vieler Kinder herauskristallisiert, wenn ihnen die Auswahl frei gestellt wurde (vgl. Abschnitt 4.1.6). In allen Fällen wurde Teilauftrag *(a)* gelöst – übrigens mit sehr aufschlussreichen Parallelen in den Vorgehensweisen, Ergebnissen (und auch Schwierigkeiten) zwischen Erwachsenen und SchülerInnen!

> *Teilauftrag a:*
> *Achtung, neue Regel: In jedem Stein soll jetzt der Unterschied der beiden über ihm liegenden Steine stehen.*
> *Findet verschiedene 3er-Mauern, deren Zielstein auf Null endet. Wie muss man die Grundreihe bauen, damit solche Nullmauern entstehen?*

Gefragt ist nach den mathematischen Bedingungen für die Grundreihe (in dem Fall die oberste Zeile), damit sich im Zielstein (in dem Fall die unterste Reihe) genau Null ergibt. Der Zielstein wird dann Null, wenn die 2. Zeile identische Zahlen enthält, wenn also gilt: $|a-b| = |b-c|$

Diese Gleichheitsbeziehung wiederum lässt sich unter einer der folgenden drei Voraussetzungen herstellen:

1. $a = b = c$	(*alle* Steine der Grundreihe sind identisch)
2. $a = c$	(identische Ecksteine in der Grundreihe)
3. $a > b > c$ bzw. $a < b < c$ und *äquidistant*	(Grundreihe mit aufeinander folgenden Zahlen bei gleich bleibender Schrittweite ≥ 1)

Der Auftrag kann dann als hinreichend bearbeitet gelten, wenn diese drei Bedingungen gefunden, begründet und durch entsprechende Beispiele konkretisiert wurden. Es kommt nicht auf die Fülle der Beispiele an, sondern vielmehr auf die Stichhaltigkeit der Begründungen.

> *Teilauftrag b:*
> *Wie viele Nullmauern kann man bauen, wenn in der Grundreihe nur die Zahlen 0 bis 10 stehen dürfen?*

Auf der Grundlage der in Teilauftrag *(a)* genannten drei Bedingungen lässt sich über eine Fallunterscheidung der Lösungsraum systematisieren:

- *Fall 1 (drei identische Steine in der Grundreihe):*

  Die Grundreihe kann aus den Zahlen 0, 1, 2, 3, …, 10 bestehen, mithin: <u>11 Möglichkeiten</u>

- *Fall 2 (identische Ecksteine in der Grundreihe):*

  Die Ecksteine können 0, 1, 2, 3, …, 10 lauten, mithin: 11 Möglichkeiten für die Ecksteine. Zu jedem dieser 11 Fälle gibt es 10 Möglichkeiten für den jeweiligen Mittelstein, nämlich ausgehend von den 11 theoretisch verfügbaren Werten 0 bis 10, wobei aber pro Eckstein-Alternative eine Zahl (nämlich die des jeweiligen Ecksteins) entfällt. Diese ist bereits im o. g. Fall 1 enthalten und wurde dort mitgezählt.

  D.h. es gibt hier $11 \cdot 10$ = <u>110 Möglichkeiten</u>.

- *Fall 3 (aufeinander folgende, äquidistante Zahlen in der Grundreihe):*

  Unter dieser Bedingung müssen die jeweils möglichen Abstände überprüft werden (vgl. das Tafelbild auf S. 98):

  - Abstand 0 entfällt (weil identisch mit Fall 1).
  - Abstand 1 bedeutet die Grundreihen: [0|1|2]; [1|2|3]; [2|3|4]; [3|4|5]; [4|5|6]; [5|6|7]; [6|7|8]; [7|8|9]; [8|9|10] und ergibt (9) bzw. 18 Möglichkeiten

    (Die Anzahlen in Klammern sind jene die bei nur einer Reihenfolge der Zahlen entstehen, also z.B. $a > b > c$. Zusätzlich muss aber auch die umgekehrte Reihenfolge mitgezählt werden, da es sich hierbei um unterscheidbare Zahlenmauern handelt, es sei denn man definiert die Aufgabe entsprechend anders; vgl. Linda in 4.2.11).
  - Abstand 2 bedeutet die Grundreihen: [0|2|4]; [1|3|5]; [2|4|6]; [3|5|7]; [4|6|8]; [5|7|9]; [6|8|10] und ergibt (7) bzw. 14 Möglichkeiten
  - Abstand 3 bedeutet die Grundreihen: [0|3|6]; [1|4|7]; [2|5|8]; [3|6|9]; [4|7|10] und ergibt (5) bzw. 10 Möglichkeiten
  - Abstand 4 bedeutet die Grundreihen: [0|4|8]; [1|5|9]; [2|6|10] und ergibt (3) bzw. 6 Möglichkeiten
  - Abstand 5 ist nur für die Grundreihe [0|5|10] möglich und ergibt (1) bzw. 2 Möglichkeiten

=> Summe aller Fälle mit den Zahlen 1-10 in der Grundreihe: (146) bzw. 171 Nullmauern

Eine beeindruckende Anzahl an Lösungen, die man anfangs sicherlich nicht vermutet hätte. Wenn Sie oder Ihre SchülerInnen Lust bekommen haben, dann können Sie ja selbst einmal erkunden, wie denn die Bedingungen für Nullmauern bei 4er-Mauern sind.

Literatur

A Mathematician's Apology (London 1941). Aus: Quotations by G. H. Hardy. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Quotations/Hardy.html

Affolter, W. et al. (2003): Das Zahlenbuch 5. Begleitband. Zug

Baireuther, P. (1997): Zahl und Form. Der Formzahlaspekt - ein Beitrag zur Verbindung von arithmetischen und geometrischen Erfahrungen. Mathematische Unterrichtspraxis, H. 1, S. 3-16

Beck, E. et al. (1992): Projekt Eigenständige Lerner: Förderung des eigenständigen Lernens, Denkens und Problemlösens von Schülern durch die Erleichterung der Selbststeuerung, Selbstbeobachtung und Reflexion der eigenen Lernerfahrungen. St. Gallen: Pädagogische Hochschule

Bissinger, S. (2005): Die computergestützte Lernumgebung ›Zahlenforscher‹ - Praxiserprobung, Analyse und Diskussion ausgewählter Fragestellungen. Unveröffentlichte Hausarbeit zur 1. Staatsprüfung. Universität Hamburg

Boettcher, W. et al. (1973): Schulaufsätze - Texte für Leser. Düsseldorf

Brügelmann, H. (2001): Prinzipien des Anfangsunterrichts: Individualisierung. Die Grundschulzeitschrift, H. 145, S. 52-53

Bruner, J. S. (1970): Der Prozeß der Erziehung. Düsseldorf

Combe, A. (1996): Pädagogische Professionalität, Hermeneutik und Lehrerbildung. Am Beispiel der Berufsbelastung von Grundschullehrkräften. In: A. Combe/W. Helsper (Hg.), Pädagogische Professionalität. Untersuchungen zum Typus pädagogischen Handelns, S. 501-520. Frankfurt/M.

Conway, J. H./Guy, R. K. (1997): Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen. Berlin

Devlin, K. (1998): Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Heidelberg

Engel, H. J. (1990): Figurierte Zahlen. mathematik lehren, H. 40, S. 18-22

Fischer, M./Hengartner, E. (1999): Lösungsstrategien in Kleingruppen entwickeln: Große Summen (3. Klasse). In: E. Hengartner (Hg.), Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht, S. 78-81. Zug

Freudenthal, H. (1974): Die Stufen im Lernprozeß und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Middenschool. Neue Sammlung, H. 14, S. 161-172

Freudenthal, H. (1981): Didaktik des Entdeckens und ›Nacherfindens‹. Grundschule, H. 3, S. 103

Gell-Mann, M. (1996): Das Quark und der Jaguar: Vom Einfachen zum Komplexen. Die Suche nach einer neuen Erklärung der Welt. München

Gerdiken, K. (2000): Das Pascal'sche Dreieck. Eine reichhaltige Zahlenstruktur. Die Grundschulzeitschrift, H. 133, S. 11-13

Gerdiken, K. et al. (2000): Zahlen und ihre Muster. Die Grundschulzeitschrift, H. 133, S. Materialteil

Hefendehl-Hebeker, L. (2001): Die Wissensform des Formelwissens. In: W. Weiser/B. Wollring (Hg.), Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. S. 83-98. Hamburg

Hengartner, E. (1997): Standorte und Denkwege – Beispiele ›forschenden Lernens‹ im Lehrerstudium. 23 S. Manuskript eines Vortrags anlässlich des Festkolloquiums 10 Jahre mathe 2000

Higgins, J. L. (1988): One point of view: We get what we ask for. Arithmetic Teacher, H. 5, S. 2

Hoffmann, P. (2001): Der Mann, der die Zahlen liebte. Die erstaunliche Geschichte des Paul Erdös und die Suche nach der Schönheit in der Mathematik. München

Holt, J. (1979): Wie Kinder lernen. Weinheim

Jäger, J. (1985): Algebraische und kombinatorische Entdeckungen an Galton-Brett und Pascal-Dreieck. mathematik lehren, H. 12, S. 16-21

jk (2005): Richtig rechnen. Lerne mehr mit Fragenbär. MACup, H. 8, S. 89

Kaune, C. (1999): Förderung metakognitiver Aktivitäten durch geeignete Aufgabenstellungen. In: M. Neubrand (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 281-284. Hildesheim

Kießwetter, K./Rehlich, H. (1990): Zauberdreiecke und andere Zahlenfiguren. mathematik lehren, H. 40, S. 23-27

KM – Der Kultusminister des Landes NRW (1985): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik. Köln

Kopp, M. (2001): Algebra mit Zahlenmauern. mathematik lehren, H. 105, S. 16-19

Krauthausen, G. (1995a): Die ›Kraft der Fünf‹ und das denkende Rechnen – Zur Bedeutung tragfähiger Vorstellungsbilder im mathematischen Anfangsunterricht. In: G. N. Müller/E. Ch. Wittmann (Hg.), Mit Kindern rechnen, S. 87-108. Bd. 96. Frankfurt/M.

Krauthausen, G. (1995b): Zahlenmauern im 2. Schuljahr – ein substantielles Übungsformat. Grundschulunterricht, H. 10, S. 5-9

Krauthausen, G. (1998): Lernen – Lehren – Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig

Krauthausen, G. (1998b): Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht. Die Grundschulzeitschrift, H. 119, S. 54-61

Krauthausen, G. (2001): »Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat.«. In: W. Weiser/B. Wollring (Hg.), Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. S. 99-113. Hamburg

Krauthausen, G. (2005a): Computer im Mathematikunterricht der Grundschule. Ernüchterung eingekehrt? Manuskript eines Hauptvortrags auf der 39. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Bielfeld. 13 S. Kurzfassung im Tagungsband: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 (CD-ROM). Hildesheim

Krauthausen, G. (2005b): Computer im Mathematikunterricht der Grundschule – Ernüchterung eingekehrt? Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. CD-ROM. Hildesheim

Krauthausen, G. (2005c): Sprache und sprachliche Anforderungen im Mathematikunterricht der Grundschule. In: H. Schöler/A. Welling (Hg.), Handbuch der Pädagogik und Psychologie bei Behinderungen. Band 3: Förderschwerpunkt Sprache. Göttingen (i. Vb.)

Krauthausen, G. (2006a): »Darf man auch sagen, wenn man Tricke rausgefunden hat?« – Eine 3. Klasse erforscht Nullmauern. In: Rathgeb-Schnierer, E./Roos, U. (Hrsg.), Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht, S. 87-100. München

Krauthausen, G. (2006b): Minusmauern – ein variiertes Aufgabenformat. Praxis Grundschule, H. 1, S. 6-8

Krauthausen, G./Scherer, P. (2003): Einführung in die Mathematikdidaktik. München

Krauthausen, G./Scherer, P. (2006): Üben im Mathematikunterricht – vernetzte Anforderungen an Lernende, Lehrende und Aufgabenangebote. Grundschule, H. 1 (i. Vb.)

Kruckenberg, A./Oehl, W. (1960, Hg.): Die Welt der Zahl. Rechenbuch f. Volksschulen. 1. Schuljahr. Hannover

Leatham, K. R. et al. (2005): Getting Started with Open-Ended Assessment. *Teaching Children Mathematics*, H. 8, S. 413-419

Martin, D./Doudin, P.-A. (1996): Metakognition und Lehrerbildung. Lernkultur im Wandel. St. Gallen

Mason, J. (1987): »Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen.« mathematik lehren, H. 21, S. 4-5

Meier, R. (2002): Differenzieren ohne zu trennen. Die Grundschulzeitschrift, H. 155, S. 4

Moser Opitz, E. (1999): Mathematischer Erstunterricht im heilpädagogischen Bereich: Anfragen und Überlegungen. Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, H. 3, S. 293-307

Moser Opitz, E. (2002): Zählen – Zahlbegriff – Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Bern

Müller, G. N. et al. (2004, Hg.): Arithmetik als Prozess. Seelze-Velber

Müller, G. N./Wittmann, E. Ch. (2004): Das kleine Zahlenbuch für 4- bis 7-jährige Kinder. Band 1: Spielen und Zählen. Seelze-Velber

Müller, G./Wittmann, E. Ch. (1984): Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig

Müller, J. H. (2005): Entdeckend lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe. Praxis Mathematik, H. 2, S. 32-38

Nagel, N. (2003): Erprobung einer ›substanziellen Lernumgebung‹ im Mathematikunterricht der Grundschule – Ansätze einer optimierten Organisation von Lernprozessen. Hausarbeit zur 1. Staatsprüfung für das Lehramt an der Grund- und Mittelstufe. 71 S. Universität Hamburg

Nelsen, R. B. (1993): Proofs without words. Exercises in visual thinking. Washington

Nelsen, R. B. (2000): Proofs without words II. More Exercises in visual thinking. Washington

Oehl, W. (1962): Der Rechenunterricht in der Grundschule. Hannover

Pinel, A. (1990): Wall games. Strategies, H. 1, S. 28-31

Polya, G. (1995): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Tübingen

Radatz, H. et al. (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht – 1. Schuljahr. Hannover

Radatz, H. et al. (1998): Handbuch für den Mathematikunterricht – 2. Schuljahr. Hannover

Radatz, H. et al. (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht – 3. Schuljahr. Hannover

Sawyer, W. W. (1964): Vision in Elementary Mathematics. Harmondsworth

Scherer, P. (1994): Fördern durch Fordern – Aktiv-entdeckende Lernformen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Zeitschrift für Heilpädagogik, H. 11, S. 761-773

Scherer, P. (1995): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg

Scherer, P. (1997): Schülerorientierung UND Fachorientierung – notwendig und möglich! Mathematische Unterrichtspraxis, H. 1, S. 37-48

Schipper, W. et al. (2000): Handbuch für den Mathematikunterricht. 4. Schuljahr. Hannover

Schönwald, H. G. (1986): Das Pascal-Dreieck im 1. Schuljahr. Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, H. 11, S. 421-425

Selter, Ch. (1993): Die Kluft zwischen den arithmetischen Kompetenzen von Erstkläßlern und dem Pessimismus der Experten. In: K. P. Müller (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 350-353. Hildesheim

Selter, Ch. (1995): Zur Fiktivität der ›Stunde Null‹ im arithmetischen Anfangsunterricht. Mathematische Unterrichtspraxis, H. 2, S. 11-19

Selter, Ch. (1997): Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept. mathematik lehren, H. 83, S. 4-8

Sjuts, J. (1999): Metakognition im Mathematikunterricht. In: M. Neubrand (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 497-500. Hildesheim

Sjuts, J. (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. Journal für Mathematik-Didaktik, H. 1, S. 18-40

Spiegel, H. (1989): Vom Numerieren und Rechnen mit Nummern - Brief an eine Lehrerin. Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, H. 7, S. 319-323

Steinbring, H. (1997): Beziehungsreiches Üben - ein arithmetisches Problemfeld. mathematik lehren, H. 83, S. 59-63

Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York

Steinweg, A. S. (2001): Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung. Münster

Steinweg, A. S. (2002): Zu Bedeutung und Möglichkeiten von Aufgaben zu figurierten Zahlen - Eine Analyse von Deutungen durch Grundschulkinder. Journal für Mathematik-Didaktik, H. 2, S. 129-151

Valtin, R. (1996): Dem Kind in seinem Denken begegnen - Ein altes, kaum eingelöstes Postulat der Grundschuldidaktik. Zeitschrift für Pädagogik, H. S. 173-186

Wielpütz, H. (1998): Anforderungen an die Lehrerbildung in der zweiten Phase (Primarstufe) - Überlegungen aus der Perspektive der Schulaufsicht. Manuskript zu einem Vortrag auf der Fachtagung der Bezirksregierung Düsseldorf »Anforderungen an die 2. Phase«. 6 S.

Wielpütz, H. (1998): Das besondere Kind im Mathematikunterricht - Anmerkungen aus der Sicht einer reflektierten Praxis, Beobachtung und Beratung. In: A. Peter-Koop (Hg.), Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 41-58. Offenburg

Winter, H. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, H. 3, S. 106-116

Winter, H. (1982): Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica*, H. 4, S. 185-211

Winter, H. (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. Journal für Mathematik-Didaktik, H. 1, S. 59-95

Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. mathematik lehren, H. 2, S. 4-16

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, H. 61, S. 37-46

Wittmann, E. Ch. (1985): Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. mathematik lehren, H. 11, S. 7-11

Wittmann, E. Ch. (1990): Wider die Flut der ›bunten Hunde‹ und der ›grauen Päckchen‹: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: E. Ch. Wittmann/G. N. Müller (Hg.), Handbuch produktiver Rechenübungen, S. 152-166. Bd. 1. Stuttgart

Wittmann, E. Ch. (1992): Üben im Lernprozeß. In: E. C. Wittmann/G. N. Müller (Hg.), Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, S. 175-186. Bd. 2. Stuttgart

Wittmann, E. Ch. (1998): Mathematics Education as a ›design science‹. In: A. Sierpinska/J. Kilpatrick (Hg.), Mathematics Education as a Research Domain. A Search for Identity. An ICMI Study, S. 87-103. Dordrecht

Wittmann, E. Ch. (2001): Developing Mathematics Education in a Systemic Process. Educational Studies in Mathematics, H. 1, S. 1-20

Wittmann, E. Ch. (2004): Developing Mathematics Education in a Systemic Process. In: H. Fujita et al. (Hg.), Proceedings of the Ninth International Congress On Mathematical Education, S. 73-90. Norwell, MA

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: P. Bender (Hg.), Mathematikdidaktik. Theorie und Praxis. S. 237-257. Bielefeld

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N. (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart

Wittmann, E. Ch. et al. (1994): Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Lehrerband. Stuttgart

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N. (2004): Das Zahlenbuch 2. Leipzig

Wubbels, T. et al. (1997): Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics, H. S. 1-28

Ziegler, G. M. (2005): Bildungslücken. DMV-Mitteilungen, H. 1, S. 34-35

Sachregister

Credits

Eine Entwicklung wie der ZAHLENFORSCHER ist niemals von einer einzelnen Person zu bewältigen. Zwar wurde der fachdidaktischen Grundlegung eine leitende Rolle zugesprochen, indem der Autor als Fachdidaktiker nicht nur beratend, sondern in verantwortlicher konzeptioneller Funktion tätig war – damit ist auch er alleine für evtl. Mängel verantwortlich – aber gleichwohl gilt es nachdrücklich anderen zu danken:

- Anna Hoffmann (Fa. digital ambient), nicht nur für die aufwändige Entwicklung des Screendesigns, die sachkundige Programmierung, die effektive Koordinationsarbeit, sondern v. a. auch für die ambitionierte Herangehensweise. Ihre eigene Freude an und Überzeugung von der Sache spricht, wie ich meine, auch aus dem Produkt;
- Dr. Georg Wierichs (Geschäftsführung Auer Verlag) für seine ausgesprochen unkomplizierte, verlässliche und kompetente Bereicherung der Entwickler-Sitzungen sowie die redaktionelle Betreuung und – zusammen mit Herrn Büchler (Geschäftsführung Auer Verlag) – für das Vertrauen und die Bereitschaft, die mit HiQ-Software verbundene Entwicklungszeit und Produktionskosten überhaupt zu verstehen, zu unterstützen und zu gewährleisten;
- Prof. Dr. Petra Scherer (Uni Bielefeld) für gewissenhaftes Redigieren dieses Handbuchtextes sowie substanzielle Rückmeldungen zu Zwischenversionen während der Programmentwicklung;
- Prof. Dr. Hartmut Spiegel (Uni Paderborn) und den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Arbeitskreises *Paderborner Entwicklungs-Arbeiten Kolloquium* (PEAK) für zahlreiche Rückmeldungen und Ideen, die ausnahmslos zur Verbesserung des Produktes beigetragen haben;
- Den Studierenden meines Seminars ›Erprobung ausgewählter Aufgabenformate‹ im WS 2004/05, die die Forschungsaufträge in verschiedenen Schulen und Jahrgangsstufen erprobt, videodokumentiert und ausgewertet haben, insbesondere Frau Bissinger für die vorzeitige Überlassung ihrer Dokumente;
- Den Praxislehrkräften in Deutschland und in der Schweiz, die Betaversionen der Software getestet und hilfreiche Rückmeldungen gegeben haben;
- Profes. Drs. Beth & Neil A. Pateman (University of Hawai/Honolulu) für die herzliche Aufnahme während meines Forschungsaufenthalts, für die Organisation zahlreicher Schulbesuche zur Erprobungen von Forschungsaufträgen sowie die Bereitstellung jener Umgebung (*the spirit of Aloha*), die u. a. das Schreiben dieser Handreichung entschieden gefördert hat;

- Pam Ale und Brian Dunkelberger (Lehua Elementary School, Pearl City/Hawaii), Marlene Fu und Iwalani Hodges (Nanaikapono Elementary School, Waianae/Hawaii) sowie Prof. Dr. Joe Zilliox (University of Hawaii) für die freundliche Überlassung ihrer Klassen bzw. Seminargruppe, wodurch mir Unterrichtsexperimente und wertvolle Erfahrungen zur Umsetzung einzelner Forschungsaufträgen ermöglicht wurden;
- Astrid Pfeffer (Lauchheim) für die englische Übersetzung der Screen- und Hilfetexte;
- Adrian Pinel (University College Chichester/GB) und Prof. Dr. Neil Pateman (University of Hawai/Honolulu) für ihre fachsprachliche Hilfe bei der englischsprachigen Version;
- Dieter Krauthausen, Frank Schlusemann, Mark Tittmann (Tonstudio krauthausen musik & tonproduktion/Köln; www.krauthausen.org) für Aufnahme, Regie und Postproduction bei den Sprachaufnahmen;
- Susanne Dobrusskin und Susan Bonney für ihre deutsche und englische Sprechstimme;
- Rolf Bunse für seine Illustrationen.

Günter Krauthausen